C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Materiali Tradizionali e Innovativi 02. 12. 2012

1. (Quarteroni-Saleri, Esercizio 5.9, pag. 179) Si considerino i sistemi lineari $A_i\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$, $i = 1, 2, 3$, con
$$A_1 = \begin{bmatrix} 15 & 6 & 8 & 11 \\ 6 & 6 & 5 & 3 \\ 8 & 5 & 7 & 6 \\ 11 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \; A_i = (A_1)^i, \; i = 2, 3,$$
e $\mathbf{b}_i$ tali che la soluzione sia sempre $\mathbf{x}_i = (1, 1, 1, 1)^T$. Si risolvano tali sistemi scegliendo il format long e utilizzando la fattorizzazione di Gauss con *pivoting* per righe (comando MATLAB `lu` e la sostituzioni in avanti e all'indietro, si veda l'esercitazione al computer del 21 novembre). Si commentino i risultati ottenuti (facendo riferimento ai numeri di condizionamento $K(A_i)$).

2. (Quarteroni-Saleri, Esercizio 5.10, pag. 179) Si dimostri che per una matrice $\mathbf{A}$ simmetrica e definita positiva si ha $K(\mathbf{A}^2) = (K(\mathbf{A}))^2$.

3. Data la matrice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 12 & -2 \\ -3 & 9 & -1 \\ -5 & 12 & 0 \end{pmatrix},$$
determinare
   (a) $\det(\mathbf{A})$ e dire se $\mathbf{A}$ è invertibile;
   (b) gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$;
   (c) gli autovalori della matrice inversa $\mathbf{A}^{-1}$ (senza calcolare $\mathbf{A}^{-1}$);
   (d) gli autovalori della matrice $\mathbf{A}^2$ (senza calcolare $\mathbf{A}^2$);
   (e) gli autovalori della matrice $2\mathbf{A}$;
   (f) gli autovalori della matrice shiftata $\mathbf{B} := \mathbf{A} - 2\,\mathbf{I}_3$ e stabilire se il metodo delle potenze (programma `metpot.m` della lezione del 28 novembre o programma `eigpower.m` di Quarteroni-Saleri, pp. 185-186) è applicabile alla matrice $\mathbf{B}$.

4. (Quarteroni-Saleri, Esercizio 6.6, pag. 199) Usando il metodo delle potenze `metpot.m` o `eigpower.m` (anche applicandolo alla matrice opportunamente shiftata) si approssimino il massimo autovalore positivo e l'autovalore negativo di modulo massimo della *matrice di Wilkinson* di dimensione 7:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
La matrice $\mathbf{A}$ può essere generato con il comando `wilkinson(7)`.