C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Materiali Tradizionali e Innovativi 07. 11. 2013

1. Si determinino le coordinate del vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \in \mathbf{R}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (-2\mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{i} - \mathbf{j})$:
   (a) geometricamente attraverso un disegno;
   (b) algebricamente.
2. Dati i vettori $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, -1)$, $\vec{c} = (1, 0, 1)$ in $\mathbf{R}^3$,
   (a) verificare se $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sono linearmente indipendenti;
   (b) determinare $\dim \mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
   (c) trovare una base di $\mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
   (d) trovare una base ortonormale di $\mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
3. Si dimostri che i vettori $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ e $\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

   Dato un generico vettore $\vec{r} = (a, b, c)$, si determinino c_1, c_2, c_3 in modo che valga la relazione $\vec{r} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$. ($(c_1, c_2, c_3)$ sono le *coordinate* di $\vec{r}$ rispetto alla base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$).
4. Sia π il piano passante per i punti $(0, 0, 0)$, $(2, 1, 2)$ e $(1, 5, 1)$.
   (a) Trovare una base ortonormale del sottospazio π di $\mathbf{R}^3$ mediante il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
   (b) Calcolare la proiezione del vettore $(1, 2, 1)$ su π.
5. Dati i vettori $\mathbf{v} = (2 - i, 4 + 2i)$ e $\mathbf{w} = (-i, 2 - 2i)$ dello spazio vettoriale $\mathbf{C}^2$ su $\mathbf{C}$ con il prodotto interno standard, calcolate le loro norme (indotte dal prodotto interno) e il loro prodotto interno $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
6. Si consideri la funzione $f(x) = 1 + (x + 2) \ln x, \quad (x \in \mathbf{R},\ x > 0)$.
   (a) Determinare un intervallo di ampiezza non superiore ad 1/2, di separazione per lo zero α della funzione.
   (b) Stimare quante iterate sono sufficienti per approssimare α con una precisione alla 10^{a} cifra decimale utilizzando il metodo di bisezione a partire dall'intervallo trovato al punto (a).
   (c) Si calcolino le prime tre iterate del metodo di bisezioni.