

1. Costante di Lebesgue (*numero di condizionamento* del problema dell'interpolazione).

- (a) Come si può estrarre dalla matrice identità `eye(n+1)` la k -esima riga?
- (b) Dati i nodi x_0, \dots, x_n , come si può usare la funzione `polyfit` per calcolare i polinomi caratteristici di Lagrange?
- (c) Sia `x = linspace(a, b, m)` una partizione dell'intervallo $[a, b]$ costituita da m punti (m sufficientemente grande, ad esempio $m = 10^5$) e siano x_0, \dots, x_n nodi in $[a, b]$. Scrivere una funzione `lambda(nodi, x)` che calcoli la *costante di Lebesgue*

$$A_n(x_0, \dots, x_n) = \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=0}^n \left| \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right|.$$

Nota: Sono utili le funzioni `abs`, `sum` e `max`. La funzione `sum` (`max`) applicata ad una matrice fornisce un vettore che contiene le somme (i massimi) per colonna degli elementi della matrice; applicata ad un vettore fornisce uno scalare dato dalla somma (dal massimo) degli elementi del vettore.

2. Creare nodi con funzioni di MATLAB/Octave.

- (a) Come si possono creare $n + 1$ *nodi equispaziati* nell'intervallo $[a, b]$?
- (b) Scrivere una funzione `chebyshev(a, b, n, g)` che in $[a, b]$ per $g = 0$ fornisce gli $n + 1$ *nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto*

$$x_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n$$

e per $g \neq 0$ gli $n + 1$ *nodi di Chebyshev-Gauss*

$$x_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+2}\right), \quad k = 1, 3, 5, \dots, 2n+1.$$

3. Si calcoli la retta di regressione per ciascuno dei seguenti gruppi di dati sperimentali con il comando `polyfit(x, y, 1)`, si disegnino la retta e i dati con il comando `plot` e si determini in quali casi l'adattamento della retta è buono, cioè il coefficiente di correlazione di Pearson $r := \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x)\text{var}(y)}}$ è vicino ad uno in valore assoluto. In MATLAB/Octave il coefficiente r può essere estratto dalla matrice di correlazione:

```
mat = corrcoef([x(:) y(:)]); r = mat(1,2)
```

- (a) (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5);
- (b) (1, 0), (2, 1), (3, 2), (5, 3);
- (c) (0, 0), (10, 9), (20, 21), (30, 30);
- (d) (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 4);
- (e) (1, 1), (9, 10), (-1, -1), (-9, -10).