Probabilità e Statistica Matematica (C.d.L. in Chimica Industriale)
24. 01. 2005

1. Siano R_1, R_2 "numeri random", cioè variabili aleatorie uniformi nell'intervallo $[0,1]$, e siano $X := R_1$, $Y := R_1 + R_2$. Si determino:
   (a) la funzione di densità congiunta di X e Y;
   (b) la funzione di densità marginale di Y (disegnare il grafico!);
   (c) $E(X)$ e $E(Y)$;
   (d) la covarianza $\mathrm{Cov}(X,Y)$;
   (e) il coefficiente di correlazione tra X e Y.

2. Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2} & \text{per } \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   Si determini la funzione generatrice dei momenti $M_X(t)$.

3. La durata in ore, X, di una lampadina elettrica prodotta da un determinato reparto è una variabile aleatoria con $E(X) = 10^3$ e $\mathrm{Var}(X) = 10^5$. Si determini la probabilità che la durata media di un campione casuale di 250 lampade sia almeno pari a 1020.

4. Si consideri una popolazione qualsiasi con media μ e varianza σ^2. Siano $T_1 = (X_1 + 2X_2)/3$ e $T_2 = (2X_1 + 3X_2)/5$ due stimatori di μ basati su un campione di ampiezza $n = 2$.
   (a) Sono corretti gli stimatori T_1 e T_2?
   (b) Si determini la varianza dei due stimatori e si dica quale dei due è più efficiente.

5. L'analisi ripetuta di un campione di sangue ha prodotto i seguenti risultati per il contenuto di glucosio nel sangue (mg/dl): 130 128 131 129 127 125.
   (a) All'interno di quale intervallo giacerà il valore vero per un livello di confidenza (a1) del 95%, (a2) del 99%?
   (b) Trovare l'intervallo fiduciario per la deviazione standard ad un livello (b1) del 95%, (b2) del 99%.

6. Si consideri un campione di ampiezza n proveniente da una popolazione normale $X \sim N(\mu, 1)$. Si determini:
   (a) la probabilità che la variabile aleatoria $(X-\mu)^2$ assuma un valore compreso tra $1,32$ e $3,84$;
   (b) n in modo tale che l'ampiezza dell'intervallo fiduciario al 90% per μ non sia maggiore di $0,5$.