Probabilità e Statistica Matematica 8. 2. 2008

1. Un'urna contiene 8 palline di cui 2 nere e 6 bianche. Vengono eseguite 2 estrazioni di una pallina, (A) rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna, (B) non rimettendola. Definiamo le variabili aleatorie X_1 e X_2: $X_1 = 1$ se la 1^a pallina estratta è nera, $X_1 = 0$ se la 1^a pallina estratta è bianca, $X_2 = 1$ se la 2^a pallina estratta è nera, $X_2 = 0$ se la 2^a pallina estratta è bianca. In entrambi i casi (A) e (B), si calcolino:
   (a) le probabilità condizionate $P(X_2 = 1|X_1 = 0)$ e $P(X_2 = 1|X_1 = 1)$;
   (b) le probabilità $P(X_2 = 1)$ e $P(X_2 = 0)$;
   (c) i valori attesi $E(X_1)$ e $E(X_2)$;
   (d) le varianze $\mathrm{Var}(X_1)$ e $\mathrm{Var}(X_2)$;
   (e) il coefficiente di correlazione tra X_1 e X_2.

2. Siano X_1 e X_2 le variabili aleatorie definite nell'esercizio 1, (A).
   (a) Per le variabili aleatorie $X_1 - X_2$ e $|X_1 - X_2|$ elencare i valori possibili e determinare le probabilità con le quali essi vengono assunti.
   (b) Calcolare $E(X_1 - X_2)$, $\mathrm{Var}(X_1 - X_2)$, $E(|X_1 - X_2|)$, $\mathrm{Var}(|X_1 - X_2|)$.

3. Sia (X_1, X_2) un campione casuale proveniente da una popolazione qualsiasi, cioè X_1 e X_2 sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con media μ e varianza σ^2. Si considerino gli stimatori $S^2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$ di σ^2 e $S = \sqrt{\frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2}$ di σ.
   Sono corretti gli stimatori S^2 e S, ossia vale $E(S^2) = \sigma^2$ e $E(S) = \sigma$?

4. Un impianto è soggetto a guasti casuali che si realizzano nel tempo secondo un processo di Poisson. Il numero medio di guasti in un anno è pari a 6. Si supponga per comodità che tutti i mesi hanno lo stesso numero di giorni. Calcolare:
   (a) la probabilità che in un anno non vi siano più di due guasti;
   (b) la probabilità che in un mese non si verifichino guasti;
   (c) la probabilità che il quarto guasto avvenga dopo il sesto mese.

5. Sono state effettuate cinque misure di una grandezza fisica ottenendo i valori: $1,00$; $1,04$; $0,99$; $1,00$; $1,02$. Assumendo che questi dati possano essere pensati come un campione normale la cui media è il vero valore della grandezza fisica, calcolare
   (a) il primo, il secondo e il terzo quartile e la media campionaria;
   (b) la varianza campionaria e la deviazione standard campionaria;
   (c) l'intervallo in cui giacerà il valore vero per un livello di confidenza del 95%;
   (d) l'intervallo fiduciario per la varianza ad un livello del 95%.

6. Sia R un numero casuale, cioè una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $[0, 1]$. Per la variabile aleatoria $X := 10^R$ si determinino:
   (a) i valori possibili; (b) la funzione di ripartizione;
   (c) la funzione di densità; (d) $P(1 \leq X < 2)$.

Probabilità e Statistica Matematica 8. 2. 2008

1. Un'urna contiene 5 palline di cui 3 nere e 2 bianche. Vengono eseguite 2 estrazioni di una pallina, (A) rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna, (B) non rimettendola. Definiamo le variabili aleatorie X_1 e X_2: $X_1 = 1$ se la 1^{a} pallina estratta è nera, $X_1 = 0$ se la 1^{a} pallina estratta è bianca, $X_2 = 1$ se la 2^{a} pallina estratta è nera, $X_2 = 0$ se la 2^{a} pallina estratta è bianca. In entrambi i casi (A) e (B), si calcolino:
   (a) le probabilità condizionate $P(X_2 = 1|X_1 = 0)$ e $P(X_2 = 1|X_1 = 1)$;
   (b) le probabilità $P(X_2 = 1)$ e $P(X_2 = 0)$;
   (c) i valori attesi $E(X_1)$ e $E(X_2)$;
   (d) le varianze $\mathrm{Var}(X_1)$ e $\mathrm{Var}(X_2)$;
   (e) il coefficiente di correlazione tra X_1 e X_2.

2. Siano X_1 e X_2 le variabili aleatorie definite nell'esercizio 1, (A).
   (a) Per le variabili aleatorie $X_1 - X_2$ e $|X_1 - X_2|$ elencare i valori possibili e determinare le probabilità con le quali essi vengono assunti.
   (b) Calcolare $E(X_1 - X_2)$, $\mathrm{Var}(X_1 - X_2)$, $E(|X_1 - X_2|)$, $\mathrm{Var}(|X_1 - X_2|)$.

3. Sia (X_1, X_2) un campione casuale proveniente da una popolazione qualsiasi, cioè X_1 e X_2 sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con media μ e varianza σ^2. Si considerino gli stimatori $S^2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$ di σ^2 e $S = \sqrt{\frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2}$ di σ.
   Sono corretti gli stimatori S^2 e S, ossia vale $E(S^2) = \sigma^2$ e $E(S) = \sigma$?

4. Un impianto è soggetto a guasti casuali che si realizzano nel tempo secondo un processo di Poisson. Il numero medio di guasti in un anno è pari a 4. Si supponga per comodità che tutti i mesi hanno lo stesso numero di giorni. Calcolare:
   (a) la probabilità che in un anno non vi siano più di tre guasti;
   (b) la probabilità che in un mese non si verifichino guasti;
   (c) la probabilità che il terzo guasto avvenga dopo il sesto mese.

5. Sono state effettuate cinque misure di una grandezza fisica ottenendo i valori: $3,00$; $3,04$; $2,99$; $3,00$; $3,02$. Assumendo che questi dati possano essere pensati come un campione normale la cui media è il vero valore della grandezza fisica, calcolare
   (a) il primo, il secondo e il terzo quartile e la media campionaria;
   (b) la varianza campionaria e la deviazione standard campionaria;
   (c) l'intervallo in cui giacerà il valore vero per un livello di confidenza del 95%;
   (d) l'intervallo fiduciario per la varianza ad un livello del 95%.

6. Sia R un numero casuale, cioè una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $[0, 1]$. Per la variabile aleatoria $X := 10^R$ si determinino:
   (a) i valori possibili; (b) la funzione di ripartizione;
   (c) la funzione di densità; (d) $P(9 \le X < 10)$.

Probabilità e Statistica Matematica 8. 2. 2008

1. Un'urna contiene 6 palline di cui 4 nere e 2 bianche. Vengono eseguite 2 estrazioni di una pallina, (A) rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna, (B) non rimettendola. Definiamo le variabili aleatorie X_1 e X_2: $X_1 = 1$ se la 1^a pallina estratta è nera, $X_1 = 0$ se la 1^a pallina estratta è bianca, $X_2 = 1$ se la 2^a pallina estratta è nera, $X_2 = 0$ se la 2^a pallina estratta è bianca. In entrambi i casi (A) e (B), si calcolino:

   (a) le probabilità condizionate $P(X_2 = 1|X_1 = 0)$ e $P(X_2 = 1|X_1 = 1)$;

   (b) le probabilità $P(X_2 = 1)$ e $P(X_2 = 0)$;

   (c) i valori attesi $E(X_1)$ e $E(X_2)$;

   (d) le varianze $\text{Var}(X_1)$ e $\text{Var}(X_2)$;

   (e) il coefficiente di correlazione tra X_1 e X_2.

2. Siano X_1 e X_2 le variabili aleatorie definite nell'esercizio 1, (A).

   (a) Per le variabili aleatorie $X_1 - X_2$ e $|X_1 - X_2|$ elencare i valori possibili e determinare le probabilità con le quali essi vengono assunti.

   (b) Calcolare $E(X_1 - X_2)$, $\text{Var}(X_1 - X_2)$, $E(|X_1 - X_2|)$, $\text{Var}(|X_1 - X_2|)$.

3. Sia (X_1, X_2) un campione casuale proveniente da una popolazione qualsiasi, cioè X_1 e X_2 sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con media μ e varianza σ^2. Si considerino gli stimatori $S^2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$ di σ^2 e $S = \sqrt{\frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2}$ di σ.
   Sono corretti gli stimatori S^2 e S, ossia vale $E(S^2) = \sigma^2$ e $E(S) = \sigma$?

4. Un impianto è soggetto a guasti casuali che si realizzano nel tempo secondo un processo di Poisson. Il numero medio di guasti in un anno è pari a 8. Si supponga per comodità che tutti i mesi hanno lo stesso numero di giorni. Calcolare:

   (a) la probabilità che in un anno non vi siano più di due guasti;

   (b) la probabilità che in un mese non si verifichino guasti;

   (c) la probabilità che il quarto guasto avvenga dopo il sesto mese.

5. Sono state effettuate cinque misure di una grandezza fisica ottenendo i valori: $5,00$; $5,04$; $4,99$; $5,00$; $5,02$. Assumendo che questi dati possano essere pensati come un campione normale la cui media è il vero valore della grandezza fisica, calcolare

   (a) il primo, il secondo e il terzo quartile e la media campionaria;

   (b) la varianza campionaria e la deviazione standard campionaria;

   (c) l'intervallo in cui giacerà il valore vero per un livello di confidenza del 95%;

   (d) l'intervallo fiduciario per la varianza ad un livello del 95%.

6. Sia R un numero casuale, cioè una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $[0, 1]$. Per la variabile aleatoria $X := 10^R$ si determinino:

   (a) i valori possibili; (b) la funzione di ripartizione;

   (c) la funzione di densità; (d) $P(3 \leq X < 4)$.

Probabilità e Statistica Matematica 8. 2. 2008

1. Un'urna contiene 7 palline di cui 3 nere e 4 bianche. Vengono eseguite 2 estrazioni di una pallina, (A) rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna, (B) non rimettendola. Definiamo le variabili aleatorie X_1 e X_2: $X_1 = 1$ se la 1^a pallina estratta è nera, $X_1 = 0$ se la 1^a pallina estratta è bianca, $X_2 = 1$ se la 2^a pallina estratta è nera, $X_2 = 0$ se la 2^a pallina estratta è bianca. In entrambi i casi (A) e (B), si calcolino:
   (a) le probabilità condizionate $P(X_2 = 1|X_1 = 0)$ e $P(X_2 = 1|X_1 = 1)$;
   (b) le probabilità $P(X_2 = 1)$ e $P(X_2 = 0)$;
   (c) i valori attesi $E(X_1)$ e $E(X_2)$;
   (d) le varianze $\mathrm{Var}(X_1)$ e $\mathrm{Var}(X_2)$;
   (e) il coefficiente di correlazione tra X_1 e X_2.
2. Siano X_1 e X_2 le variabili aleatorie definite nell'esercizio 1, (A).
   (a) Per le variabili aleatorie $X_1 - X_2$ e $|X_1 - X_2|$ elencare i valori possibili e determinare le probabilità con le quali essi vengono assunti.
   (b) Calcolare $E(X_1 - X_2)$, $\mathrm{Var}(X_1 - X_2)$, $E(|X_1 - X_2|)$, $\mathrm{Var}(|X_1 - X_2|)$.
3. Sia (X_1, X_2) un campione casuale proveniente da una popolazione qualsiasi, cioè X_1 e X_2 sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con media μ e varianza σ^2. Si considerino gli stimatori $S^2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$ di σ^2 e $S = \sqrt{\frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2}$ di σ.
   Sono corretti gli stimatori S^2 e S, ossia vale $E(S^2) = \sigma^2$ e $E(S) = \sigma$?
4. Un impianto è soggetto a guasti casuali che si realizzano nel tempo secondo un processo di Poisson. Il numero medio di guasti in un anno è pari a 3. Si supponga per comodità che tutti i mesi hanno lo stesso numero di giorni. Calcolare:
   (a) la probabilità che in un anno non vi siano più di due guasti;
   (b) la probabilità che in un mese non si verifichino guasti;
   (c) la probabilità che il quarto guasto avvenga dopo il sesto mese.
5. Sono state effettuate cinque misure di una grandezza fisica ottenendo i valori: $7,00$; $7,04$; $6,99$; $7,00$; $7,02$. Assumendo che questi dati possano essere pensati come un campione normale la cui media è il vero valore della grandezza fisica, calcolare
   (a) il primo, il secondo e il terzo quartile e la media campionaria;
   (b) la varianza campionaria e la deviazione standard campionaria;
   (c) l'intervallo in cui giacerà il valore vero per un livello di confidenza del 95%;
   (d) l'intervallo fiduciario per la varianza ad un livello del 95%.
6. Sia R un numero casuale, cioè una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $[0, 1]$. Per la variabile aleatoria $X := 10^R$ si determinino:
   (a) i valori possibili; (b) la funzione di ripartizione;
   (c) la funzione di densità; (d) $P(7 \leq X < 8)$.