Università degli Studi di Bologna - Dipartimento di Matematica

Master di II livello in Matematica per le Applicazioni

A.A. 2003/2004

Corso di Calcolo Simbolico e Computer Algebra

24. 3. 2004

1. Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^4 - 4x^2y - 12yz - 9z^2 = 0 \\ 4y^2 + 16yz - 3z^3 - 12z - 3 = 0 \\ 4x^4 - 16x^2y - 48yz + 9z^3 + 36z + 9 = 0\,. \end{cases}$$

   a) Utilizzando il metodo di eliminazione, si determinino tutte le soluzioni del sistema in $\mathbb{Q}$ e in $\mathbb{R}$.

   b) Si dimostri che il sistema ha un numero finito di soluzioni in $\mathbb{C}$.

   c) Si determinino tre polinomi $f, g, h \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ tali che il sistema di equazioni $f = g = h = 0$ abbia le stesse soluzioni in $\mathbb{Q}$ del sistema su scritto, ma i due ideali (f, g, h) e $(x^4 - 4x^2y - 12yz - 9z^2,\ 4y^2 + 16yz - 3z^3 - 12z - 3,\ 4x^4 - 16x^2y - 48yz + 9z^3 + 36z + 9)$ di $\mathbb{Q}[x, y, z]$ siano diversi.

   d) Si provi che un qualunque generatore dell'ideale $(x^4 - 4x^2y - 12yz - 9z^2,\ 4y^2 + 16yz - 3z^3 - 12z - 3,\ 4x^4 - 16x^2y - 48yz + 9z^3 + 36z + 9) \cap \mathbb{Q}[z]$ è riducibile.

2. In $\mathbb{R}^3$ sia fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e si consideri la superficie S data dalle parametrizzazioni razionali:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{(u+v)^2} \\[2mm] y = \dfrac{u}{(u+1)^2} \\[2mm] z = \dfrac{u+v}{u+1} \end{cases}$$

   a) Si determini la più piccola varietà W di R^3 contenente S e si stabilisca se essa è irriducibile.

   b) Si stabilisca se $W = S$, cioè se le equazioni date parametrizzano tutta W e nel caso vi sia una disuguaglianza stretta determinare i punti di $W - S$. (Suggerimento: dato $P = (a, b, c) \in W$ è sempre possibile trovare $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tali che (u, v, a, b, c) soddisfino le equazioni date? Usare il teorema di estensione).

3. Si consideri un robot planare con un giunto di rotazione 1, un segmento 2 di lunghezza l_2, un giunto di rotazione 2 e un giunto prismatico 3 che permette alla lunghezza l_3 di un segmento 3 di variare da m_1 ad m_2. Il segmento 4 è la mano (= punto finale del segmento 3) che ha la direzione del giunto prismatico 3 . Si introducano tre sistemi di riferimento cartesiani destrorsi come segue. Il primo sistema (x_1, y_1) è fissato con l'origine nel giunto 1 e il secondo sistema di coordinate (x_2, y_2) ha anche l'origine nel primo giunto con l'asse x_2 in direzione del braccio 2. Il terzo sistema (x_3, y_3) ha origine nel giunto 2 con l'asse x_3 in direzione del giunto prismatico. Si denoti con θ_i $(i = 1, 2)$ l'angolo orientato che serve per ruotare in senso antiorario l'asse x_i nell'asse x_{i+1}. Infine, si denotino con α l'angolo (orientato in senso antiorario) tra il semiasse delle x_1 positive e la direzione della mano e con (a, b) le coordinate della mano nel sistema (x_1, y_1).

   a) Dare una formula esplicita per la mappa $f\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ($\mathcal{J}$ = spazio dei giunti, $\mathcal{C}$ = spazio delle configurazioni del robot), che descrive il posizionamento della mano (a, b, α) in funzione di θ_1, θ_2 e l_3.

   b) Calcolare le singolarità cinematiche del robot e interpretarle geometricamente. Quante soluzioni del problema cinematico inverso ci sono al massimo in tali singolarità cinematiche?

   c) Convertire la funzione f in una mappa polinomiale utilizzando in $\mathcal{J}$ le nuove coordinate $c_1 := \cos\theta_1$, $s_1 := \operatorname{sen}\theta_1$, $c := \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\alpha$, $s := \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}\alpha$ e l_3.

   d) Data una posizione $(a, b, \cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ della mano (dove (a, b) sono le coordinate nel sistema 1 del punto in cui si trova la mano e l'orientamento della mano è dato dal vettore unitario $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$), trovare un sistema di equazioni le cui soluzioni diano le possibili configurazioni dei giunti per le quali si ottiene tale posizione della mano.

   e) Risolvere il sistema di d) calcolando con un sistema di computer algebra una base di Gröbner ridotta per l'ideale generato dalle equazioni di d) nell'anello
   $$\mathbb{Q}(a, b, c, s, l_2)[c_1, s_1, l_3]$$
   rispetto all'ordine lessicografico $c_1 > s_1 > l_3$.

   Nota: Con CoCoA si usi $\mathbb{Q}[c_1, s_1, l_3, a, b, c, s, l_2]$ con l'ordine lessicografico $c_1 > s_1 > l_3 > a > b > c > s > l_2$.

   f) Sia ora $l_2 = 3$ e $2 \leq l_3 \leq 3$. L'orientamento della mano sia fissato in direzione del semiasse delle x_1 positive. Decidere (senza o con l'uso del computer), se si può posizionare la mano nei seguenti punti:
   $$(4, 3), \quad (5, 2), \quad (2.51,\ 2.96)\,.$$
   In caso affermativo dire con quanti posizionamenti dei giunti il punto è raggiungibile.