Esercizi di Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti

1. 12. 2003

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

   a) $v(t) = \ln t + t^{-1}$, b) $y = \sqrt{x^2+1}$, c) $y = \dfrac{x}{\ln x}$, d) $y = e^x \operatorname{sen} x$

   e) $v(t) = a \operatorname{sen} t + t^{-2}$, f) $y = \cos(e^{2x})$, g) $y = \dfrac{x^2}{x+5}$, h) $y = \sqrt{x}\, \ln x$.

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

   a) determinare gli intervalli in cui è crescente o decrescente;
   b) determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto di intersezione del grafico con l'asse y;
   c) trovare i limiti $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3. Dimostrare che le funzioni

   (a) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$, (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$,

   (c) $f(x) = |x| \cdot \cos x$, $x \in \mathbf{R}$, (d) $f(x) = |x| \cdot (\cos x - 1)$, $x \in \mathbf{R}$

   sono continue in $x = 0$. Esse sono anche derivabili in $x = 0$?

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

   a) $v(t) = at + \dfrac{b}{t} + c$, b) $y = 3\cos x - 2 \operatorname{sen} x$, c) $y = \dfrac{x}{x-3}$,

   d) $z(t) = (1-t)\cos t$, e) $f(y) = a\sqrt{y} \cdot \operatorname{sen} y$, f) $Q(\alpha) = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$,

   g) $h(\phi) = \dfrac{\operatorname{sen} 2\phi}{\cos 3\phi}$, h) $f(x) = \cos(e^{3x})$, i) $f(x) = \cos(4x^2 - x + 1)$.

5. Trovare le funzioni inverse (se esistono) delle seguenti funzioni. Inoltre, calcolare le derivate sia delle funzione che delle funzioni inverse.

   a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{1+e^{-3x}}$,

   b) $f\colon \mathbf{R}\setminus\{2\} \to \mathbf{R}\setminus\{2\}$, $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$,

   c) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$,

   d) $f\colon \{x \in \mathbf{R} \mid x > -1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$.

6. Discutere il comportamento limite di $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$ per $x \to 2^-$, $x \to 2^+$, $x \to -2^-$, ed $x \to -2^+$. Rappresentare un grafico di $f(x)$.

7. Il diametro di un cilindro circolare retto misura $6,0 \pm 0,003$ cm mentre la sua altezza misura $4,0 \pm 0,002$ cm. Qual è (a) il massimo errore possibile e (b) il massimo errore percentuale che si commette nel calcolo del volume? (Si usi il differenziale per approssimare l'errore del volume.)

8. Un grandezza positiva a abbia un errore assoluto Δa, molto piccolo nel confronto con a. Stimare l'errore assoluto del reciproco di a.

9. Mediante il differenziale calcolare approssitivamente la quantità $\sqrt{10001}$.

10. Usare il differenziale della funzione $f(x) = \ln x$ e il valore $\ln 50 = 3,91$ per calcolare approssitivamente $\ln 51$.

11. Si ricordi che il pH di una soluzione acquosa è stato definito da Sørensen come $p\mathrm{H} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+]$, dove $[\mathrm{H}^+]$ indica la concentrazione (in mol/l) di H^+.

    A quante unità di pH corrisponde un errore di misura della concentrazione di H^+ del 20%? (Si usi il differenziale della funzione logaritmica e il valore $\log_{10} e \approx 0,4$ e confronti il risultato con quello dell'Esercizio 4 del 27. 10. 2003.)

12. Determinare i punti di minimo e massimo relativi ed i punti di flesso delle funzioni:

    a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$, b) $f(x) = 2\cos x + \cos 2x$,

    c) $f(x) = x + \operatorname{sen} x$, d) $f(x) = \dfrac{6}{1+e^{-x}}$.

13. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$,

    a) determinare gli intervalli in cui è crescente o decrescente;
    b) trovare i minimi e i massimi relativi e assoluti;
    c) determinare gli intervalli in cui è convessa o concava ed i punti di flesso;
    d) determinare gli asintoti;
    e) disegnare il grafico.

14. Determinare gli asintoti delle funzioni:

    a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$, b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

15. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$

    prendendo come punto iniziale $x_0 = 1$.

16. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor delle seguenti funzioni (prendendo come punto iniziale $x_0 = 0$) e dire per quali valori di x la serie è convergente:

    a) $f(x) = \ln(1+2x)$, b) $f(x) = e^{2x}$, c) $f(x) = \ln \dfrac{1}{1+x}$,

    d) $f(x) = \dfrac{1}{1-3x}$, e) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, f) $f(x) = e^{-x^2}$.

17. Calcolare i seguenti limiti:

    a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln x}$, d) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{2t}-1}{t}$,

    e) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$, f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$, g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$,

    h) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\frac{1}{x})^x$, i) $\lim\limits_{x\to -1^-} (1+\frac{1}{x})^x$, j) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\dfrac{x^2+3x}{x^2+1})^{-x}$.