Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti 18. 1. 2005

1. Secondo van der Waals lo stato di una mole di un gas reale può essere descritto tramite l'equazione
$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT\,,$$
dove la costante $R = 8,31$ Nm/(mol $\cdot$ K) è uguale per tutti i gas, mentre le costanti positive a (in $\mathrm{Nm}^4/\mathrm{mol}^2$) e b (in $\mathrm{m}^3/\mathrm{mol}$) dipendono dal gas. Nel seguente esprimiamo la pressione p in $\mathrm{N/m}^2$, il volume molare V in $\mathrm{m}^3/\mathrm{mol}$ e la temperatura T in K (temperatura assoluta) e trascuriamo le unità di misura. Consideriamo una trasformazione isoterma (T costante).
   (a) Calcolare $\lim\limits_{V\to b^+} p(V)$.
   (b) Calcolare $\lim\limits_{V\to +\infty} p(V)$.
   (c) Posto $a = \frac{27}{2}$, $b = 4$ e $RT = \frac{27}{32}$, trovare i massimi e i minimi relativi e disegnare il grafico della funzione $p = p(V)$, $V > b$. (Si osservi che tra i punti stazionari vi è $V = 8$.)
   (d) Calcolare il lavoro L compiuto dal gas nel passare da un volume iniziale V_1 a un volume finale V_2, cioè l'integrale
$$L = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV\,.$$

2. Calcolare gli integrali:
$$\text{(a)} \int_{-1}^{0} (x+1)^5\,dx, \quad \text{(b)} \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} 2x\,dx, \quad \text{(c)} \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx, \quad \text{(d)} \int x \ln x\,dx\,.$$

3. Calcolare approssimativamente
$$\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$
con il polinomio di Taylor di grado 4 e di punto iniziale 0 della funzione $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Nota bene: Il modo più semplice per ottenere lo sviluppo di Taylor in questione è di sostituire x con $-\frac{1}{2}x^2$ nello sviluppo di Taylor di e^x.

4. Sia $z = f(x, y)$ la funzione definita implicitamente dall'equazione
$$xy + xz + yz = 1\,.$$
   (a) Trovare il luogo dei punti nel piano x, y in cui la funzione f non è definita.
   (b) Calcolare le derivate parziali del primo ordine della funzione f.
   (c) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie $z = f(x, y)$ nel punto $(1, 0, f(1, 0))$.
   (d) Siano P e Q punti nel piano x, y con le coordinate $(1, 0)$ e $(2, 2)$ rispettivamente. Calcolare la derivata direzionale nel punto P secondo la direzione del vettore $\overrightarrow{PQ}$.