C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti 26. 11. 2008

1. Trovare le derivate di

   (a) $v(t) = \ln t + t^{-1}$, (b) $y = \sqrt{x^2+1}$, (c) $y = \dfrac{x}{\ln x}$, (d) $y = e^x \operatorname{sen} x$

   (e) $v(t) = a \operatorname{sen} t + t^{-2}$, (f) $y = \cos(e^{2x})$, (g) $y = \dfrac{x^2}{x+5}$, (h) $y = \sqrt{x}\,\ln x$.

2. Trovare le derivate di

   (a) $v(t) = at + \dfrac{b}{t} + c$, (b) $y = 3\cos x - 2 \operatorname{sen} x$, (c) $y = \dfrac{x}{x-3}$,

   (d) $z(t) = (1-t)\cos t$, (e) $f(y) = a\sqrt{y} \cdot \operatorname{sen} y$, (f) $Q(\alpha) = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$,

   (g) $h(\phi) = \dfrac{\operatorname{sen} 2\phi}{\cos 3\phi}$, (h) $f(x) = \cos(e^{3x})$, (i) $f(x) = \cos(4x^2 - x + 1)$.

3. Data la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

   (a) determinare gli intervalli in cui è crescente o decrescente;

   (b) determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto di intersezione del grafico con l'asse y;

   (c) trovare i limiti $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4. Dimostrare che le funzioni $\begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

   sono continue in $x = 0$. Esse sono anche derivabile in $x = 0$?

5. Dire la funzione $f(x) = |x| \cdot x^2$, $x \in \mathbf{R}$, è derivabile anche nel punto $x = 0$ e, in caso affermativo, calcolare $f'(0)$.

6. Si studi la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = |x| \cdot \cos x, \quad x \in \mathbf{R}$,

   (b) $f(x) = |x| \cdot (\cos x - 1), \quad x \in \mathbf{R}$.

7. (Si veda l'esercizio 2 del 29. 10. 2008.) Trovare le funzioni inverse (se esistono) delle seguenti funzioni. Inoltre, calcolare le derivate sia delle funzione che delle funzioni inverse.

   (a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \quad f(x) = \dfrac{2}{1+e^{-3x}}$,

   (b) $f\colon \mathbf{R}\setminus\{2\} \to \mathbf{R}\setminus\{2\}\,, \quad f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$,

   (c) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \quad f(x) = e^x - e^{-x}$,

   (d) $f\colon \{x \in \mathbf{R} \mid x > -1\} \to \mathbf{R}\,, \quad f(x) = \ln(1+x)$.

8. Si usi il differenziale della funzione $f(x) = \ln x$ e il valore $\ln 50 = 3,91$ per calcolare approssimativamente $\ln 51$.

9. Mediante il differenziale calcolare approssimativamente la quantità $\sqrt{10001}$.

10. Usare il differenziale della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ per calcolare approssimativamente $\dfrac{1}{1001}$ e $\dfrac{1}{999}$.

11. Se il pH è stato determinato con una accuratezza di un decimo di pH, con quale errore percentuale si conosce $[H_3O^+]$? (Si usi il differenziale della funzione $y = f(x) = -\log_{10} x$ e il valore $\log_{10} e \approx 0,4$.)

12. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione
$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$
prendendo come punto iniziale $x_0 = 1$.

13. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ prendendo come punto iniziale $x_0 = \pi/2$.

14. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor delle seguenti funzioni (prendendo come punto iniziale $x_0 = 0$) e dire per quali valori di x la serie è convergente:

    (a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, (b) $f(x) = \dfrac{1}{1-3x}$, (c) $f(x) = \ln(1 + \dfrac{x}{3})$,
    (d) $f(x) = \ln \dfrac{1}{1-x}$, (e) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

15. Calcolare approssimativamente:

    (a) $\ln 1,5$ con il polinomio di Taylor di grado 5 e di punto iniziale 0 della funzione $f(x) = \ln(1+x)$ e valutare l'errore, cioè trovare una limitazione del resto $R_5(x) = f(x) - T_5(x)$ per $x = 0,5$;
    (Un altro metodo: Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è una serie a termini di segno alternato, decrescenti in valore assoluto, e tendenti a zero, la serie è convergente. Per tali serie vale: l'errore che si commette prendendo invece della somma $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una somma parziale $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, non supera il valore assoluto del termine a_{n+1}.)

    (b) $\sqrt{2}$ con il polinomio di Taylor di grado 3 e di punto iniziale 0 della funzione $f(x) = \sqrt{x+1}$ e valutare l'errore, cioè trovare una limitazione del resto di Lagrange.

16. Calcolare una approssimazione della soluzione dell'equazione
$$x + \cos x = 0$$
sostituendo la funzione $\cos x$ con il suo polinomio di Taylor $T_2(x) = T_3(x)$ di punto iniziale $x_0 = 0$. Valutare l'errore che si commette approssimando $f(x) = \cos x$ con il polinomio $T_3(x)$, per $-1 < x < 0$, cioè trovare una limitazione del valore assoluto del resto secondo Lagrange $R_3(x)$, $-1 < x < 0$.

17. Calcolare una approssimazione della soluzione dell'equazione

$$e^x + x = 0$$

sostituendo la funzione e^x con il suo polinomio di Taylor $T_2(x)$ di punto iniziale $x_0 = 0$. Valutare l'errore che si commette approssimando $f(x) = e^x$ con il polinomio $T_2(x)$, per $-0,6 < x < 0$, cioè trovare una limitazione del valore assoluto del resto secondo Lagrange $R_2(x)$, $-0,6 < x < 0$.

18. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2^x}$$

prendendo come punto iniziale $x_0 = 0$. Dire per quali valori reali di x è convergente questa serie.

19. Secondo un particolare metodo radioattivo si usa l'isotopo ^{42}K del potassio. Esso perde il 5% della sua intensità di radiazione ogni ora. Che percentuale perderà in tre ore? Dopo quante ore ha perso il 90% della sua intensità di radiazione?

20. Si calcolino (se esistono) i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{4}{1+e^{-3t}}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x$,

(d) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{6}{2+\ln t}$, (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot \operatorname{sen} x$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$.

21. Trovare la frazione generatrice $\dfrac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbf{N})$ del numero periodico

$$0,121212\ldots = 12 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \cdots\right)$$

usando la formula della somma di una serie geometrica.