C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti 4. 12. 2008

1. Per ognuna delle seguenti funzioni

   (1) $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}, \quad x \neq 0;$ (2) $f(x) = \sqrt{x}\ \ln \dfrac{1}{x}, \quad x > 0;$

   (3) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x;$ (4) $f(x) = \sqrt{x}\ \ln \dfrac{1}{x}, \quad x > 0;$

   (5) $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-1}, \quad x \neq 1;$ (6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}, \quad x \neq 1;$

   (a) determinare gli intervalli in cui è crescente o decrescente;
   (b) trovare i minimi e i massimi relativi e assoluti;
   (c) determinare gli intervalli in cui è convessa o concava ed i punti di flesso;
   (d) determinare gli asintoti;
   (e) disegnare il grafico.

2. Per le funzioni (5) e (6) determinare l'equazione della retta tangente al loro grafico nel punto di intersezione del grafico con l'asse y.

3. Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \tan 2x}{\ln \tan 3x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$,

   (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$, (e) $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x})$, (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\dfrac{x^2+3x}{x^2+1})^{-x}$,

   (g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$, (h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$, (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln x}$.

4. L'energia potenziale $V(r)$ di una molecola biatomica dipende dalla distanza r dei due atomi e può essere modellato con la funzione di Morse

   $$V(r) = D(1 - e^{-a(r-r_0)})^2,$$

   dove r_0 è la distanza all'equilibrio, D è l'energia di dissociazione e a è una costante che controlla la larghezza del potenziale. Per il NaCl si hanno $D = 3,7$ eV, $r_0 = 2,5$ Å, $a = 0,6\text{Å}^{-1}$.
   1 eV (elettronvolt) $= 1,60217646 \cdot 10^{-19}$ J, 1 Å (ångström) $= 10^{-10}$ m.

   (a) Calcolare $\lim_{r\to+\infty} V(r)$.
   (b) Trovare il minimo e il punto di flesso di $V(r)$.
   (c) Calcolare il polinomio di Taylor di $V(r)$ del secondo grado e di centro r_0.
   (d) Attorno al suo minimo si può approssimare l'energia potenziale con una parabola, cioè $V(r) \approx \frac{1}{2}k(r-r_0)^2$, dove k è la costante di forza del legame tra i due atomi. Si usi il risultato di (c) per calcolare k (in Jm^{-2}) di NaCl.
   (e) Rappresentare approssimativamente in un grafico l'andamento del potenziale di Morse di NaCl, indicando esplicitamente sul grafico la scala e i valori dei parametri.