C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti 8. 1. 2009

1. Calcolate (si veda il foglio del 10/12/2008, esercizio 3):

   (a) $\int_2^3 x^5\,dx$, (b) $\int_{-2}^{-1} x^{-5}\,dx$, (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$

   (d) $\int_0^9 4\sqrt{x}\,dx$, (e) $\int_0^2 \frac{6x^2+4x+2}{\sqrt{x}}\,dx$, (f) $\int_1^e -\frac{1}{x}\,dx$.

2. Calcolate:

   (a) $\int_0^1 2^x\,dx$, (b) $\int_1^2 e^{-x+1}\,dx$, (c) $\int_0^4 (|x-1|+|x-3|)\,dx$, (d) $\int_{-5}^5 \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

3. Calcolate i seguenti integrali ed esprimete i risultati in forma decimale, con 2 cifre significative dopo la virgola: a) $\int_0^{10} \frac{1-x}{x}\,dx$, b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$.

4. Calcolate l'area della regione limitata di piano compresa tra il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ e l'asse x, al variare di x nell'intervallo $[0, \pi]$.

5. Calcolate l'area della regione finita di piano definita dai grafici delle funzioni $y = \ln x$, $y = 1 + \ln x$ e dalle due rette (verticali) $x = 2$, $x = 5$.

6. Si trovi l'area limitata dalla parabola $y = 2 - x^2$ e dalla retta $y = -x$.

7. Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione della curva $y = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$, intorno l'asse delle x.

8. Calcolare la lunghezza dell'arco di catenaria $y = \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ da $x = 0$ ad $x = \ln 2$.

9. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale
   $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
   con la condizione iniziale $y(0) = -1$.

10. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale
    $$\frac{dy}{dx} = y(y-3)$$
    con la condizione iniziale

    (a) $y(0) = \frac{3}{2}$, (b) $y(0) = 3$, (c) $y(0) = 6$.

11. In una reazione chimica A + B $\longrightarrow$ C del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A e B siano 2 e 1 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t soddisfa l'equazione differenziale
    $$\frac{dx}{dt} = k(2-x)(1-x)\,,$$
    dove k (in $s^{-1}M^{-1}$) è una costante positiva.

(a) Si calcoli la soluzione $x(t)$ dell'equazione differenziale con la condizione iniziale $x(0) = 0$.

(b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$.

12. Nella reazione bimolecolare $2\,\mathrm{NO_2} \longrightarrow \mathrm{N_2O_4}$ la concentrazione $C = C(t) = [\mathrm{NO_2}]$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{dC}{dt} = -kC^2$$

dove k è una costante positiva. Sia $C(0) = C_0$.

(a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale.

(b) Trovare il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$.

13. Trovare tutte le soluzioni reali delle seguenti equazioni differenziali:

(a) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0,$

(b) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0,$

(c) $4y''(x) + 4y'(x) + y(x) = 0.$

14. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

(a) $\displaystyle 2\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0\,,$ (b) $\displaystyle 4\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0\,.$

15. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4\,. \end{cases}$$

16. In questo esercizio dimostreremo che, se si tiene conto della resistenza dell'aria, non è vero che un grave cade con una velocità linearmente crescente nel tempo, ovvero secondo la ben nota legge $z(t) = C_1 + C_2 t - (g/2)t^2$.

Sia $z = z(t)$ la coordinata verticale di un certo oggetto di massa m, sottoposto alla forza di gravità $-mg$ (ove $g > 0$ è la costante di accelerazione gravitazionale della terra e t è il tempo). Si sperimenta che, se $z'(t) =: v(t)$ è la velocità verticale del grave, la resistenza dell'aria produce su di esso una forza circa uguale a $-\alpha v(t)$, dove α è una costante positiva che dipende, fra le altre cose, dalla forma dell'oggetto (il segno meno nell'espressione appena data è dovuto al fatto che la forza è ovviamente orientata in senso contrario alla velocità). Mettendo tutte queste informazioni nella legge di Newton si ottiene

$$mz''(t) = -mg - \alpha z'(t) \quad \text{ovvero} \quad mv'(t) = -mg - \alpha v(t).$$

(a) Si trovi la soluzione $v = v(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} mv'(t) = -mg - \alpha v(t) \\ v(0) = v_0\,. \end{cases}$$

(b) Si calcoli la velocità limite $\lim_{t\to+\infty} v(t)$ e si dica se essa dipende dalla velocità iniziale v_0.

(c) Si usi la soluzione di (a) per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} mz''(t) = -mg - \alpha z'(t) \\ z'(0) = v_0 \\ z(0) = z_0 \, . \end{cases}$$