C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e per i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti 12. 01. 2011

1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

   (a)
   $$\iint_A (3x^2y + y^2)\, dx\, dy$$
   essendo $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$;

   (b)
   $$\int_0^3 \left(\int_{2-x}^{x+2} (x^2 + xy)\, dy \right) dx;$$

   (c)
   $$\iint_A \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy,$$
   dove A è la corona circolare limitata dalle curve $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

2. Il *baricentro* G di una figura piana omogenea S (ossia di un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$) è definito come il punto di coordinate:
   $$x_G = \frac{\iint_S x\, dx\, dy}{\iint_S dx\, dy}\ ;\ y_G = \frac{\iint_S y\, dx\, dy}{\iint_S dx\, dy}\ .$$
   Si calcolino le coordinate del baricentro del triangolo di vertici $A = (0, 0),\ B = (3, 6)$ e $C = (6, 0)$.

3. Calcolare l'integrale curvilineo
   $$\int_C (x^2 - y)\, dx + (y^2 + x)\, dy$$
   da $(0, 1)$ a $(1, 2)$, esteso ai seguenti percorsi C:

   (a) al segmento rettilineo che va dal punto $(0, 1)$ al punto $(1, 2)$;

   (b) ai segmenti rettilinei che vanno dal $(0, 1)$ a $(1, 1)$ e da $(1, 1)$ a $(1, 2)$;

   (c) alla parabola $x = t$, $y = t^2 + 1$, $0 \le t \le 1$.

4. (a) Verificare che la forma
   $$[1 + \cos(x - y)]\, dx + [\cos(x + y)]\, dy$$
   è un differenziale esatto, e trovarne le primitive.

   (b) Calcolare l'integrale curvilineo
   $$\int_C [1 + \cos(x - y)]\, dx + [\cos(x + y)]\, dy\, ,$$
   dove C è il segmento di retta $y = x,\ 0 \le x \le \pi$.