Teoremi sulle funzioni continue

Teorema 11. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue nel punto x_0 allora ivi sono continue anche le funzioni $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$, l'ultima solo se $g(x_0) \neq 0$.

Teorema 12. Le seguenti funzioni sono continue in ogni intervallo: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $\sin x$, $\cos x$, a^x $(a > 0)$.

Teorema 13. Se $y = f(x)$ è continua nel punto x_0 e $z = g(x)$ è continua nel punto $y_0 := f(x_0)$ allora la funzione $z = g(f(x))$ (detta funzione composta) è continua nel punto x_0.

Teorema 13 (Weierstraß). Ogni funzione continua in un intervallo chiuso è ivi limitata e assume un valore massimo e minimo.

Teorema 14 (teorema dei valori intermedi o di Bolzano). Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$ e sia $A := f(a)$ e $B := f(b)$. Allora per ogni numero C compreso tra A e B esiste almeno un numero $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = C$.

Calcolo differenziale

Derivate e differenziali

Sia $f(x)$ una funzione numerica reale e sia $x_0 \in D$ un punto di accumulazione del dominio D di f (cioè un punto non isolato di D).

Definizione 1. La derivata di f nel punto x_0 è definito come

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f)x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

se questo limite esiste.

Ponendo $h := \Delta x := x - x_0$, $\Delta y := f(x) - f(x_0)$ e sostituendo x_0 con x potremmo anche scrivere:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \end{aligned}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è detto rapporto incrementale (tasso medio di variazione, tasso di accrescimento) di f in $[x, x + \Delta x]$.

Sia Δx un incremento (o decremento) dato ad x e sia $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ l'incremento della y. Se la funzione $f(x)$ ammette derivata in x (cioè è derivabile o differenziabile in x) allora dalla definizione stessa di derivata può scriversi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

dove $\alpha = \alpha(x, \Delta x) \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Quindi:
$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$ con $\alpha \to 0$ per $\Delta x \to 0$.

Definizione 2. $\qquad dy := f'(x)\Delta x$
è detta il differenziale di y associato all'incremento Δx di x.