Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti 18. 1. 2006

1. Si consideri la seguente reazione chimica:

$$A + B \longrightarrow P\,.$$

La velocità della reazione è uguale alla velocità di scomparsa o di A o di B. Si è trovato empiricamente che

$$-\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt} = k[A][B]\,, \tag{1}$$

dove $[A] = f(t)$ è la concentrazione di A (in mol/l) in funzione del tempo t (in s) e k è la costante specifica di velocità (in $\mathrm{l} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$).

   (a) Si ha in particolare $\dfrac{d[A]}{dt} = \dfrac{d[B]}{dt}$. Che cosa ne segue per il legame tra le funzioni $[A]$ e $[B]$?

   (b) Si supponga che le concentrazioni iniziali di A e di B siano uguali e trovi la forma integrata dell'equazione (1), cioè calcoli i due integrali della seguente equazione (2):

$$-\int \frac{d[A]}{[A]^2} = \int k dt\,. \tag{2}$$

   Si determini la costante di integrazione in modo tale che per $t = 0$ la concentrazione di A sia $[A]_0$.

   (c) Si scriva $[A] = f(t)$ in forma esplicita, si trovi $\lim\limits_{t \to +\infty} [A]$ e si disegni il grafico della funzione $[A] = f(t)$.

2. Calcolare gli integrali:

   (a) $\displaystyle\int_0^2 |x-1|\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$, (d) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$.

3. Calcolare approssimativamente le soluzioni dell'equazione

$$\operatorname{sen} x = (x - \frac{\pi}{2})^2$$

sostituendo la funzione $\operatorname{sen} x$ con il suo polinomio di Taylor di grado 2 e di punto iniziale $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Data la funzione $z = f(x,y) = (3x - y + 1)^2, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2$,

   (a) calcolare le derivate parziali del primo ordine della funzione f;

   (b) disegnare le curve di livello per le quote 0 e 4;

   (c) (facoltativo) disegnare il grafico di f.