Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti 25. 1. 2007

1. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2, \quad x \neq -1,$
   (a) trovare i minimi e i massimi relativi;
   (b) determinare gli asintoti;
   (c) disegnare il grafico della funzione.

2. Calcolare gli integrali:
   (a) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)e^x\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2}\,dx$.

3. In una reazione chimica A + B $\longrightarrow$ C del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A, B e C siano $[\mathrm{A}]_0$, $[\mathrm{B}]_0$ e 0 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k([\mathrm{A}]_0 - x)\cdot([\mathrm{B}]_0 - x) \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$$

   dove k (in $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$) è una costante positiva. Si calcolino la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy e il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$ nei seguenti casi:

   (a) $[\mathrm{A}]_0 = [\mathrm{B}]_0 = 2$, (b) $[\mathrm{A}]_0 = 4$, $[\mathrm{B}]_0 = 3$.

4. Data la funzione $z = f(x,y) = (x-2y)^2, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2$,
   (a) disegnare le curve di livello per $z = 0$ e per $z = 9$;
   (b) calcolare le derivate parziali del primo ordine di f;
   (c) calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P(1,0)$ in direzione orientata dell'asse delle y negative;
   (d) trovare i minimi della funzione f;
   (e) (facoltativo) disegnare o descrivere il grafico di f.

5. Determinare i tre autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ della matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Calcolare il valore numerico approssimato dell'integrale dell'esercizio 2(a):

$$\int_1^2 (x-1)e^x\,dx$$

   sia con il metodo dei Trapezi che con il metodo di Simpson.

Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti 25. 1. 2007

1. Data la funzione $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-1}, \quad x \neq 1,$
   (a) trovare i minimi e i massimi relativi;
   (b) determinare gli asintoti;
   (c) disegnare il grafico della funzione.

2. Calcolare gli integrali:
   (a) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)e^x\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{-2x}\,dx,$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^3}\,dx.$

3. In una reazione chimica A + B $\longrightarrow$ C del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A, B e C siano $[\mathrm{A}]_0$, $[\mathrm{B}]_0$ e 0 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k([\mathrm{A}]_0 - x)\cdot([\mathrm{B}]_0 - x) \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$$

   dove k (in $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$) è una costante positiva. Si calcolino la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy e il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$ nei seguenti casi:

   (a) $[\mathrm{A}]_0 = [\mathrm{B}]_0 = 1,$ (b) $[\mathrm{A}]_0 = 4$, $[\mathrm{B}]_0 = 5.$

4. Data la funzione $z = f(x,y) = (2x-y)^2, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2,$
   (a) disegnare le curve di livello per $z = 0$ e per $z = 9$;
   (b) calcolare le derivate parziali del primo ordine di f;
   (c) calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P(1,0)$ in direzione orientata dell'asse delle x negative;
   (d) trovare i minimi della funzione f;
   (e) (facoltativo) disegnare o descrivere il grafico di f.

5. Determinare i tre autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ della matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Calcolare il valore numerico approssimato dell'integrale dell'esercizio 2(a):

$$\int_1^2 (x-1)e^x\,dx$$

   sia con il metodo dei Trapezi che con il metodo di Simpson.