# Esercizi di Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti

13. 12. 2007

1. Trovare tutte le soluzioni reali delle seguenti equazioni differenziali:

   (a) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$,

   (b) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$,

   (c) $4y''(x) + 4y'(x) + y(x) = 0$.

2. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

   (a) $2\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0\,,$  (b) $4\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0\,.$

3. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4\,. \end{cases}$$

4. In questo esercizio dimostreremo che, se si tiene conto della resistenza dell'aria, non è vero che un grave cade con una velocità linearmente crescente nel tempo, ovvero secondo la ben nota legge $z(t) = C_1 + C_2 t - (g/2)t^2$.

   Sia $z = z(t)$ la coordinata verticale di un certo oggetto di massa $m$, sottoposto alla forza di gravità $-mg$ (ove $g > 0$ è la costante di accelerazione gravitazionale della terra e $t$ è il tempo). Si sperimenta che, se $z'(t) =: v(t)$ è la velocità verticale del grave, la resistenza dell'aria produce su di esso una forza circa uguale a $-\alpha v(t)$, dove $\alpha$ è una costante positiva che dipende, fra le altre cose, dalla forma dell'oggetto (il segno meno nell'espressione appena data è dovuto al fatto che la forza è ovviamente orientata in senso contrario alla velocità). Mettendo tutte queste informazioni nella legge di Newton si ottiene

$$mz''(t) = -mg - \alpha z'(t) \quad \text{ovvero} \quad mv'(t) = -mg - \alpha v(t).$$

   (a) Si trovi la soluzione $v = v(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} mv'(t) = -mg - \alpha v(t) \\ v(0) = v_0\,. \end{cases}$$

   (b) Si calcoli la velocità limite $\lim_{t\to+\infty} v(t)$ e si dica se essa dipende dalla velocità iniziale $v_0$.

   (c) Si usi la soluzione di (a) per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} mz''(t) = -mg - \alpha z'(t) \\ z'(0) = v_0 \\ z(0) = z_0\,. \end{cases}$$