# C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti

22. 10. 2008

1. Scrivere i seguenti numeri nella forma $a + bi$: (a) $e^{2\pi i/3}$, (b) $5e^{\pi i}$, (c) $\frac{1}{3}e^{-\pi i/2}$.

2. Trovare la somma di $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, geometricamente usando un poligono vettoriale. Verificare il risultato con una somma algebrica.

3. Dati i vettori $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-3, 2)$, calcolare $\vec{a} - \vec{b}$, $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

4. Dire se la retta congiungente i punti $(-1, 0, 4)$, $(-3, 5, 7)$ è ortogonale al vettore $(2, -5, 3)$.

5. Trovare l'angolo tra i vettori $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Dato il vettore($\vec{a} = (1, 3)$, determinare la sua proiezione secondo la direzione del vettore $\vec{b} = (1, 1)$.

7. Sia $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ un vettore arbitrario in $\mathbf{R}^n$. Usando la disuguaglianza di Schwarz, provare che
$$(v_1 + v_2 + \cdots + v_n)^2 \leq n(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)\,.$$
Trovare un vettore $\vec{v}$ tale che nella precedente disuguaglianza valga il segno di uguale.

8. (a) Trovare condizioni geometriche su $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ affinché valga $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$ oppure $\vec{v} \cdot \vec{w} = -|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$.

   (b) Il *coefficiente di correlazione* di un campione di dati bivariati $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ è definito come
$$r(x, y) = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - \overline{y})^2}}\,,$$
dove $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$ e $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k$ sone le medie campionarie.
Usare (a) per dimostrare che $r(x, y) = \pm 1$ se e solo se esistono $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$ tali che $y_k = \pm a x_k + b$ per ogni $k = 1, \ldots, n$.

9. Determinare l'area del parallelogramma che ha per lati i vettori $\vec{a} = (3, -3, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, -4)$.

10. Trovare l'area del triangolo di vertici $(1, -2, 0)$, $(3, -1, 0)$, $(-1, 2, 0)$.

11. Dati i punti $P_1 = (x_1, y_1, 0)$, $P_2 = (x_2, y_2, 0)$, $P_3 = (x_3, y_3, 0)$, calcolare l'area del triangolo di vertici $P_1$, $P_2$, $P_3$. (Suggerimento: si considerino i vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ e il loro prodotto vettoriale.)

12. Calcolare il volume del parallelepipedo di spigoli $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = (4, 2, 1)$, $\vec{c} = (1, 0, -1)$.