C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti 5. 11. 2008

1. Trovare i limiti (se esistono) delle seguenti successioni (a_n) per $n \to +\infty$:

   (a) $a_n = \dfrac{3-n}{5-n}$, (b) $a_n = \dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{2n}$, (c) $a_n = (\dfrac{1}{2})^n$,

   (d) $a_n = (-2)^n$, (e) $a_n = \dfrac{3-n}{n^2}$, (f) $a_n = (1+10^{-4})^n$,

   (g) $a_n = (-\dfrac{1}{3})^n$, (h) $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-\dfrac{1}{3})^k$, (i) $a_n = \sum_{k=2}^{n} (-\dfrac{1}{3})^k$.

2. Calcolare le somme delle serie infinite:

   (a) $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$ supponendo che $|r| < 1$,

   (b) $c + c/2 + c/2^2 + c/2^3 + \cdots$,

   (c) $1 - r + r^2 - r^3 + r^4 - \cdots$ supponendo che $-1 < r < +1$,

3. Un individuo si trova esposto, a partire da un dato istante iniziale, a un certo tipo di radiazioni. Ogni giorno assorbe una quantità fissa R di radiazioni e perde il 30% della quantità di radiazioni accumulata nei giorni precedenti.

   Qual è la quantità complessiva di radiazioni, presente nell'organismo:

   (a) dopo 4 giorni dall'istante iniziale;

   (b) quando viene raggiunto l'equilibrio (il numero dei giorni dall'istante iniziale tende all'infinito)?

4. Il cesio isotopo ^{137}Cs perde annualmente il 2,3 % della sua massa per disintegrazione radioattiva. ^{137}Cs è un pericoloso inquinante contenuto nel *fall-out* radioattivo.

   (a) Supponiamo che ogni anno si liberi nell'ambiente la stessa massa M del ^{137}Cs. Qual è la massa totale che verrà accumulata (a1) dopo n anni, (a2) quando viene raggiunto l'equilibrio ($n \to \infty$)?

   (b) Calcolare il semiperiodo ("tempo di dimezzamento") di ^{137}Cs, cioè il tempo necessario affinché la metà del numero degli atomi di ^{137}Cs inizialmente presenti si trasformi (e, di conseguenza, il numero di atomi di ^{137}Cs risulti dimezzato).

   (c) Siano presenti inizialmente N_0 atomi dell'isotopo ^{137}Cs. Determinare il parametro λ in modo tale che il numero N dei atomi presenti al tempo t (in anni) sia approssimativamente $N = N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

5. Stabilire se le seguenti serie sono convergenti:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$, (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\log_{10} n}$, (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} (\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1})$, (d) $\sum_{k=1}^{\infty} 0,9^k$.

   Suggerimenti:

   (b) Si confronti $\log_{10} n$ con n. (c) Si calcoli $s_n = \sum_{k=1}^{n} (\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1})$ e $\lim_{n\to\infty} s_n$.