C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti 20. 1. 2009

1. Calcolare

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x^3+2}{x+3}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$.

   Suggerimento: (c) Prima di integrare si dimostri che $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x} = 1-\cos x$.

2. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ dei seguenti problemi di Cauchy:

   (a) $\begin{cases} y'' - 12y' + 35y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2\,. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2\,. \end{cases}$

   (c) Trovare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

3. La concentrazione $C = C(t)$ di un soluto in funzione del tempo t sia soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = 3(20 - C) \\ C(0) = 5\,. \end{cases}$$

   (a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy.
   (b) Si trovi il limite di $C(t)$ per $t \to +\infty$.
   (c) Usando la risposta di (a), si determini t in modo tale che $C(t) = 10$.

4. Data la funzione

$$z = f(x, y) = (x-1)^2 - y^2, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

   determinare:

   (a) il gradiente di f nel punto $(2, 1)$;
   (b) la derivata direzionale di f nel punto $(2, 1)$ in direzione della retta bisettrice del primo quadrante;
   (c) la curva di livello di f per la quota $z = 0$ (disegno!);
   (d) l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2, 1, 0)$;
   (e) i punti stazionari di f e classificarli.

C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti 20. 1. 2009

1. Calcolare

$$\text{(a)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx, \quad \text{(b)} \int_0^2 \frac{x^3+2}{x+3}\,dx, \quad \text{(c)} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}\,dx, \quad \text{(d)} \int_{-\infty}^0 2xe^{2x}\,dx.$$

   Suggerimento: (c) Prima di integrare si dimostri che $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x} = 1-\cos x$.

2. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} y'' - 8y' + 15y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -2\,. \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} y'' + 6y' + 13y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

   (c) Trovare il limite $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

3. La concentrazione $C = C(t)$ di un soluto in funzione del tempo t sia soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = 2(30-C) \\ C(0) = 10\,. \end{cases}$$

   (a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy.
   (b) Si trovi il limite di $C(t)$ per $t \to +\infty$.
   (c) Usando la risposta di (a), si determini t in modo tale che $C(t) = 20$.

4. Data la funzione

$$z = f(x,y) = x^2 - (y+1)^2, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

   determinare:

   (a) il gradiente di f nel punto $(2,1)$;
   (b) la derivata direzionale di f nel punto $(2,1)$ in direzione della retta bisettrice del primo quadrante;
   (c) la curva di livello di f per la quota $z = 0$ (disegno!);
   (d) l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2,1,0)$;
   (e) i punti stazionari di f e classificarli.