C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti

17. 2. 2009

1. Calcolare

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3+3}{x+2}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$, (d) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

   Suggerimento: (a) Prima di integrare si dimostri che $\dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen} x} = 1 - \operatorname{sen} x$.

2. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ dei seguenti problemi di Cauchy:

   (a) $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' - 6y' + 10y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 5\,. \end{cases}$

   (c) Nei casi (a) e (b), trovare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

3. Si consideri la reazione $2\,N_2O_5 \longrightarrow 4NO_2 + O_2$. La concentrazione $x := [N_2O_5]$ dipende dal tempo t, cioè $x = x(t)$, ed è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx \\ x_0 = x(0)\,, \end{cases}$$

   dove $k = 8{,}05 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$.

   (a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy.
   (b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$.
   (c) Si trovi il tempo di mezza-vita della reazione, cioè il tempo $t_{1/2}$ a cui metà del reagente ha reagito.
   (d) Dopo quante ore la concentrazione di N_2O_5 si riduce all'1% della concentrazione iniziale x_0?

4. Data la funzione

$$z = f(x,y) = x^2 + y^3 - xy, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

   determinare:

   (a) il gradiente di f nel punto $(1,1)$;
   (b) la derivata direzionale di f nel punto $(1,1)$ in direzione dell'asse delle x negative;
   (c) l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1,1)$;
   (d) i punti stazionari di f e classificarli.