C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e per i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti 3. 11. 2011

1. Dati i vettori $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, -1)$, $\vec{c} = (1, 0, 1)$ in $\mathbf{R}^3$,
   (a) verificare se $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sono linearmente indipendenti;
   (b) determinare $\dim \mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
   (c) trovare una base di $\mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
   (d) trovare una base ortonormale di $\mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Si dimostri che i vettori $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ e $\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

   Dato un generico vettore $\vec{r} = (a, b, c)$, si determinino c_1, c_2, c_3 in modo che valga la relazione $\vec{r} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$.

3. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 70, Esercizio 21) Per quali valori del parametro reale t il vettore $\mathbf{w} = (2, t, 0, 1)$ di $\mathbf{R}^4$ appartiene al sottospazio $\mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ generato da $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 1)$? Calcolare la dimensione dello spazio $\mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ al variare di t.

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 71, Esercizio 24) Stabilire quali delle seguenti funzioni $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ sono lineari:
   (a) $f \colon (x, y) \mapsto (xy, x + y)$;
   (b) $f \colon (x, y) \mapsto (x - y, x + y + 1)$;
   (c) $f \colon (x, y) \mapsto (2x - y, x + 3y)$.

5. Qual è il valore che viene assegnato alla variabile b in ognuno dei seguenti casi (a), (b) e (c):
   (a) `a = 0; for k = 1 : 3; a = a + k^2; end; b = a`
   (b) `a = 1; for k = 1 : 3; a = a + a^2; end; b = a`
   (c) `a = 2; while a <= 5 a = a^2; end; b = a`

6. (Quarteroni-Saleri, p. 40, Esercizio 1.8) Dato un vettore v di dimensione n, scrivendo `c = poly(v)` è possibile costruire i coefficienti, memorizzati nel vettore c, del polinomio $(x - \mathsf{v}(1))(x - \mathsf{v}(2)) \cdot \ldots \cdot (x - \mathsf{v}(\mathsf{n}))$. Ci si aspetta pertanto di ritrovare v con il comando `roots(poly(v))`. Usando un ciclo `for` o `while`, si provi a calcolare `roots(poly([1 : n])` dove n varia da 2 fino a 25 e si commentino i risultati ottenuti.
   Nota: Con `[1 : n]` si genera un vettore `[1 2 3 ... n]`.

7. Si consideri la funzione $f(x) = 1 + (x + 2) \ln x, \quad (x \in \mathbf{R},\ x > 0)$.
   (a) Determinare un intervallo di ampiezza non superiore ad $\frac{1}{2}$, di separazione per lo zero α della funzione.
   (b) Stimare quante iterate sono sufficienti per approssimare α con una precisione alla 10^{a} cifra decimale utilizzando il metodo di bisezione a partire dall'intervallo trovato al punto (a).
   (c) Si calcolino le prime tre iterate del metodo di bisezione.