C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e per i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti

10. 11. 2011

1. Descrivere geometricamente l'applicazione $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto z(1+i\sqrt{3})$. Stabilire se f è $\mathbf{R}$-lineare. Scrivere f in forma matriciale, cioè posto $z = x + iy$ e $f(z) = \overline{x} + i\overline{y}$, trovare una matrice A tale che $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Qual è l'applicazione inversa e qual è la matrice associata ad essa?

2. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 42, p. 103) Si considerino la base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$ formata dai vettori $\vec{b_1} = (1,2)$ e $\vec{b_2} = (2,0)$ e l'endomorfismo $\mathcal{L}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ così definito:
$$\mathcal{L}(\alpha\vec{b_1} + \beta\vec{b_2}) = (2\alpha + \beta)\vec{b_1} - \beta\vec{b_2}.$$
   (a) Scrivere la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
   (b) Scrivere la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ rispetto alla base canonica.
   (c) Determinare $\mathrm{Ker}(\mathcal{L})$, $\mathrm{Im}(\mathcal{L})$, le loro dimensioni e una loro base.

3. Data la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcolare $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, $\frac{1}{2}\mathbf{A}$, $\det(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$, $\det(\frac{1}{2}\mathbf{A})$ e le somme $\sum_{k=1}^{3} a_{k,1} \cdot a_{2,k}$, $\sum_{i=2}^{3}\sum_{j=2}^{3} a_{i+1,j-1}$. Scrivere il codice Octave per calcolare tali somme usando cicli `for`.

4. Posto $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,

   valutare (se è possibile) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}+\mathbf{C}$, $3\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$, $\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}$.

5. Dati i vettori $\mathbf{a} = [3,-1,5]$ e $\mathbf{b} = [7,4,-2]$, calcolare $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^T$ e $\mathbf{a}^T\cdot\mathbf{b}$. È un caso che il determinante di $\mathbf{a}^T\cdot\mathbf{b}$ è zero?

6. Calcolare il volume del parallelepipedo di spigoli $\vec{a} = (1,-3,2)$, $\vec{b} = (4,2,1)$, $\vec{c} = (1,0,-1)$.

7. Trovare la matrice inversa di $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$. Controllare il risultato con il comando `inv(A)` di Octave/MATLAB.

8. (a) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari nei casi $a = 1,6$ e $a = 1,5$.
$$\begin{cases} 0,5x - 1,0y = 0,1 \\ ax - 3,0y = 0,0\,. \end{cases}$$
   (b) Calcolare la matrice inversa (se esiste) della matrice dei coefficienti in entrambi i casi.

9. Risolvere il seguente sistema lineare con l'algoritmo di Gauss calcolando la fattorizzazione LU della matrice dei coefficienti:
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1\;. \end{array}$$

10. Scrivere la matrice `a` che viene creata dal seguente codice Octave:
`clear a; for k = 1 : 3 for i = 1 : 2; a(i,k) = i + k; end; end;`