C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e per i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti 24. 11. 2011

1. Data la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,
   (a) calcolarne gli autovalori e gli autospazi corrispondenti;
   (b) determinare una matrice ortogonale $\mathbf{M}$ tale che $\mathbf{M}^T\mathbf{A}\mathbf{M}$ sia diagonale (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 118, Teorema 6.6);
   (c) determinare una forma canonica della conica di equazione
   $$(x, y)\mathbf{A}(x, y)^T + 16x - 16y + 7 = 0$$
   e dire di che tipo di conica si tratta.

2. Come nel esercizio precedente, si riduca la conica $xy = 1$ a forma canonica (mediante una rotazione; per quale angolo?).

3. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 121, Esercizio 56) Determinare autovalori e autovettori della seguente matrici; se è possibile, diagonalizzarla:
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 122, Esercizio 59) Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ composta di autovettori della matrice
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Risolvere $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ conoscendo i fattori $\mathbf{L}$ ed $\mathbf{U}$ di $\mathbf{A}$=$\mathbf{LU}$:
   $$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

6. Risolvere, ricercando il pivot non nullo quando è necessario, il seguente sistema
   $$\begin{array}{rcrcrcr} u & + & 4v & + & 2w & = & -2 \\ -2u & - & 8v & + & 3w & = & 32 \\ & & v & + & w & = & 1 \end{array} .$$

7. Confrontare i risultati degli esercizi precidenti con quelli ottenuti con MATLAB/Octave:
   >> p = poly(A) % polinomio caratteristico della matrice quadrata A
   >> roots(p) % autovalori
   >> [V, D] = eig(A) % diag(D) = autovalori, colonne di V = autovettori
   >> A*V % uguale a V*D
   >> V*D % se V è non singolare, $A = VDV^{-1}$ (decomposizione spettrale)

8. Sia $\mathbf{A} \in M(n \times n, \mathbb{C})$ una matrice non singolare. Dimostrare che:
   (a) se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di $\mathbf{A}$ allora $\lambda \neq 0$ e λ^{-1} è un autovalore di $\mathbf{A}^{-1}$;
   (b) se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di $\mathbf{A}$ e $k \in \mathbb{N}$ allora λ^k è un autovalore di $\mathbf{A}^k$.