C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e per i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti

1\. 12. 2011

1. Disegnare gli insiemi di livello e descrivere il grafico delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x, y) = |x| + |y|$, (b) $f(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$, (c) $f(x, y) = (x + y)^2$.

   Verificare i risultati al computer con Octave:
   ```
   xx = yy = linspace(−1,1);
   [x, y] = meshgrid(xx, yy);
   z = abs(xx) + abs(yy);
   meshc(x, y, z)
   ```

2. Trovare i limiti (se esistono):

   (a) $\lim_{n\to+\infty} (-\frac{1}{3})^n$, (b) $\lim_{t\to+\infty} t \operatorname{sen} t$, (c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen} x$,

   (d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$, (e) $\lim_{x\to 2-} \frac{3}{x-2}$, (f) $\lim_{x\to 2+} \frac{3}{x-2}$,

   (g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \operatorname{sen} x$, (h) $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-\frac{1}{3})^k$, (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x}$,

   (j) $\lim_{n\to+\infty} (-3)^n$, (k) $\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^{2n}$, (l) $\lim_{x\to 0^+} \ln x$.

3. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 183, Esercizio 2) Utilizzando il grafico di $f(x) = e^x$, disegnare i grafici di

   $$y_1 = e^{|x|} \qquad y_2 = \log|x| \qquad y_3 = e^x - 1 \qquad y_4 = |e^x - 1| \qquad y_5 = |\log x|$$

   Verificare i risultati al computer (utilizzando i comandi/funzioni Octave `linspace`, `plot`, `exp`, `log`, `abs`).

4. Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$ costanti positive. Trovare i limite delle seguenti funzioni per $t \to +\infty$:

   (a) $f(t) = \dfrac{a}{1 + be^{-ct}}$ (funzione logistica di crescita),

   (b) $f(t) = a(1 + \dfrac{b-a}{a - be^{c(b-a)t}})$ (funzione della cinetica chimica).

   Suggerimento: distinguere i casi $a > b$, $a = b$ e $a < b$.

5. Dire se la seguente funzione è continua su $\mathbf{R}^2$:

   $$\begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Big), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 416, Esercizio 3) Dimostrare che

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

   non esiste.
   Suggerimento: calcolare il limite per $x \to 0$ lungo l'asse delle x e lungo la parabola di equazione $y = x^2$. (Questo esempio è interessante perché lungo ogni retta uscente dall'origine la funzione ha lo stesso limite: questo potrebbe indurre a ritenere erroneamente che il limite in due variabili esista.)