Soluzioni degli esercizi di Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti 29. 10. 2003

1. Matrice di rotazione: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, vettori ruotati:
   $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,23 \\ 1,87 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}-2 \\ 2\sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1,87 \\ 1,23 \end{pmatrix}$;
   per il disegno clicca su: vettori ruotati.

2. $2\vec{u} + \vec{v} = (5, 5)$, $\quad -2\vec{u} - 3\vec{v} = (-7, -11)$.

3. $\vec{a} - \vec{b} = (5, -1)$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{13}$, $< \vec{a}, \vec{b} >= -4$.

4. $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, per il disegno clicca su:
   poligono vettoriale.

5. $\cos\alpha = \dfrac{< \vec{a}, \vec{b} >}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{-10}{5 \cdot 3} = -\dfrac{2}{3}$, $\qquad \alpha = \arccos(-\frac{2}{3}) \approx 2,3$, cioè $131,8^o$.

6. $< (-1, 0, 4) - (-3, 5, 7), (2, -5, 3) >=< (2, -5, -3), (2, -5, 3) >= 20 \neq 0$, cioè la retta e il vettore non sono ortogonali.

7. a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-4, -1, 4) - (4, 1, 1) = (-8, -2, 3)$;
   b) $\overrightarrow{AD} = (d-4, d+1, 0)$, $<\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OD}>= 2d^2 - 3d = 0$, da cui $d = \frac{3}{2}$, allora $D(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$.
   (Il valore $d = 0$ è da scartare.)

8. a) $< \vec{a}, \vec{b} >= -4$.
   b) $\vec{b} = (4, 0) = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \lambda(-1, 1) + (x, y)$, dove $< (x, y), (-1, 1) >= -x + y = 0$. Ne segue $x = y$, quindi $(4, 0) = (-\lambda + x, \lambda + x)$, $x = 2$, $\lambda = -2$, e la decomposizione cercata è $\vec{b} = (4, 0) = (2, -2) + (2, 2)$.

9. La proiezione di $\vec{a}$ è il vettore $(2, 2)$.

10. a) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-1, 1, 0) + (1, 0, 2) = (0, 1, 2)$, cioè $C(0, 1, 2)$;
    b) $| \overrightarrow{AB} | = |(1, 0, 2) - (-1, 1, 0)| = |(2, -1, 2)| = 3$.

11. a) $\overrightarrow{OA} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (4, -2, 4)$, $<\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}>= -12$.
    b) $\overrightarrow{OP} = \lambda(-2, 2, 0)$, $<\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BP}>=< (-2, 2, 0), (-2\lambda - 2, 2\lambda, -4) >= 8\lambda + 4 = 0$,
    $\lambda = -\frac{1}{2}$, cioè $P(1, -1, 0)$.

12. $a_1 = 2$, $b_1 = -2$, $a_2 = 3$, $b_2 = 0$.