Soluzioni degli Esercizi di Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti

18. 10. 2004

Percentuale, serie geometrica, funzione esponenziale, logaritmo

1. Ponendo $q = 1 - 0,023 = 0,977 = 97,7\%$, la massa accumulata dopo n anni è $M_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}M$, oppure (secondo il modello matematico scelto) $M_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}\,qM$.

2. $M_{\text{equ}} := \lim\limits_{n\to\infty} M_n = \dfrac{M}{1-q} = 43,5M$. Si arriva allo stesso risultato anche senza eseguire un limite: $0,023M_{\text{equ}} = M$.

3. $N(1 \text{ anno}) = \mathrm{N}_0\mathrm{e}^{-\lambda\cdot 1 \text{ anno}} = \mathrm{N}_0 - 0,023\mathrm{N}_0$, da cui si ricava

   $\lambda = -\dfrac{\ln(0,977)}{\text{anno}} = 0,023 \text{ anno}^{-1}$.

4. $T_{1/2} = \dfrac{\ln(2)}{\lambda} = 30$ anni.

5. $0,01N_0 = N_0e^{-\lambda t}$, da cui $t = \dfrac{\ln(100)}{\lambda} = 200$ anni.
   Altro metodo: Dopo 7 tempi di dimezzamento, ossia 210 anni, la radiaoattività si riduce a $1/2^7 = 1/128 \approx 1\%$.

6. $\lambda = \dfrac{\ln(2)}{T_{1/2}} = 0,35 \text{ anno}^{-1}$.

7. Sia t il tempo necessario per arrivare dal rapporto $1:2$ al rapporto $1:40$, e siano λ_1 e λ_2 le costanti di decadimento di ^{134}Cs e ^{137}Cs rispettivamente. Si ottiene

   $$\frac{2N_0e^{-\lambda_2 t}}{N_0e^{-\lambda_1 t}} = 40\,,$$

   quindi $e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} = 20$ e $t = \dfrac{\ln(20)}{\lambda_1-\lambda_2} = 9$ anni, cioè la provenienza dei due isotopi nei funghi è da imputare alla deposizione in seguito all'incidente di Chernobyl.

8. $N(t) = N_0e^{\lambda_{\text{b}}t}e^{\lambda t} = N_0e^{(\lambda_{\text{b}}+\lambda)t} = N_0e^{\lambda_{\text{eff}}t}$, cioè $\lambda_{\text{eff}} = \lambda_{\text{b}} + \lambda$. Di conseguenza $\dfrac{\ln 2}{T_{\text{eff}}} = \dfrac{\ln 2}{T_{\text{b}1/1}} + \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$, si veda l'esercizio 4. Risulta

   $$\frac{1}{T_{\text{eff}}} = \frac{1}{T_{\text{b}1/1}} + \frac{1}{T_{1/2}}\,, \qquad T_{\text{eff}} = \frac{1}{\frac{1}{T_{\text{b}1/1}} + \frac{1}{T_{1/2}}}\,.$$

9. $\dfrac{1}{T_{\text{eff}}} = (\dfrac{1}{110} + \dfrac{1}{730})$ giorni^{-1} e $T_{\text{eff}} = 96$ giorni.