La distribuzione normale

Federico Plazzi

20 Giugno 2016

Distribuzione statistica

- Possiamo immaginare una *distribuzione* statistica come un'istogramma: i dati sono divisi in *classi di frequenza* (o "*bin*") lungo l'asse orizzontale e l'altezza della colonna indica quanti dati ricadono in quella classe.

Distribuzione statistica

- Possiamo immaginare una *distribuzione* statistica come un'istogramma: i dati sono divisi in *classi di frequenza* (o "*bin*") lungo l'asse orizzontale e l'altezza della colonna indica quanti dati ricadono in quella classe.

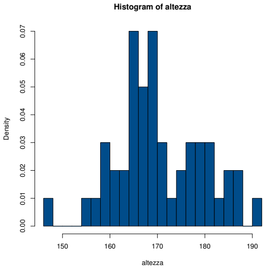


Figura: Un esempio di distribuzione: l'altezza degli studenti di Scienze Naturali

Distribuzione statistica

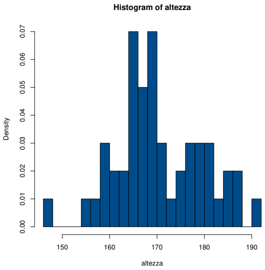


Figura: Un esempio di distribuzione: l'altezza degli studenti di Scienze Naturali

- L'asse verticale può riferirsi ad un *numero* vero e proprio oppure ad una *frequenza*.

Distribuzione statistica

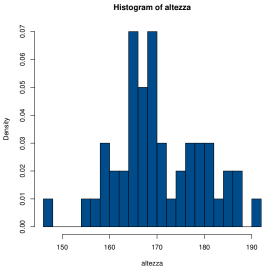


Figura: Un esempio di distribuzione: l'altezza degli studenti di Scienze Naturali

- L'asse verticale può riferirsi ad un *numero* vero e proprio oppure ad una *frequenza*.
- Una distribuzione è un *fatto empirico*, ma la spezzata che unisce le sommità delle colonne *può* essere descritta bene da una *funzione matematica*.

Distribuzione statistica

- Una distribuzione molto conosciuta, ben studiata ed estremamente utile è la *distribuzione normale* (la famosa "curva a campana" di Gauss).

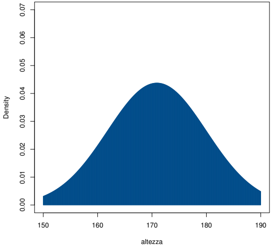


Figura: La curva normale ottenuta usando media e deviazione standard dalla distribuzione precedente

La distribuzione normale

Equazione della curva normale

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

La distribuzione normale

Equazione della curva normale

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

Equazione della normale standard, ossia di una normale con $\mu = 0$ e $\sigma = 1$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{2}$$

La distribuzione normale

Equazione della curva normale

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

Equazione della normale standard, ossia di una normale con $\mu = 0$ e $\sigma = 1$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{2}$$

Deviata normale

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{3}$$

Test Z

- Il fatto che la distribuzione normale e soprattutto la normale standard siano così ben studiate ci permette di capire quanto un certo valore sia “raro”.

Test Z

- Il fatto che la distribuzione normale e soprattutto la normale standard siano così ben studiate ci permette di capire quanto un certo valore sia “raro”.
- La domanda diventa: *quanti valori ci sono, nella mia distribuzione, così grandi (o così piccoli)?*

Test Z

- Il fatto che la distribuzione normale e soprattutto la normale standard siano così ben studiate ci permette di capire quanto un certo valore sia "raro".
- La domanda diventa: *quanti valori ci sono, nella mia distribuzione, così grandi (o così piccoli)?*
- Traducendo in termini statistici: *dato un valore X, qual'è l'area sotto la curva da X a $+\infty$ (o da $-\infty$ a X)?*

Test Z

- Il fatto che la distribuzione normale e soprattutto la normale standard siano così ben studiate ci permette di capire quanto un certo valore sia "raro".
- La domanda diventa: *quanti valori ci sono, nella mia distribuzione, così grandi (o così piccoli)?*
- Traducendo in termini statistici: *dato un valore X, qual'è l'area sotto la curva da X a $+\infty$ (o da $-\infty$ a X)?*
- Se quell'area è molto grande, ne concludo che il mio valore non è molto "raro", perché ce ne sono molti più grandi (o più piccoli).

Test Z

- Il fatto che la distribuzione normale e soprattutto la normale standard siano così ben studiate ci permette di capire quanto un certo valore sia "raro".
- La domanda diventa: *quanti valori ci sono, nella mia distribuzione, così grandi (o così piccoli)?*
- Traducendo in termini statistici: *dato un valore X, qual'è l'area sotto la curva da X a $+\infty$ (o da $-\infty$ a X)?*
- Se quell'area è molto grande, ne concludo che il mio valore non è molto "raro", perché ce ne sono molti più grandi (o più piccoli).
- Se invece quell'area è piccola (tipicamente sotto il 5%), posso concludere che il mio valore è *significativo*, perché è raro avere un valore così grande (o così piccolo).

Test Z

- Possiamo quindi eseguire il cosiddetto "*Test Z*"...

Test Z

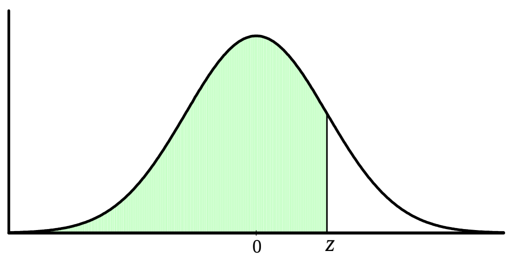
- Possiamo quindi eseguire il cosiddetto "*Test Z*"...
- La normale tabulata è tipicamente la normale standard, per cui dobbiamo trasformare il nostro valore X nella sua deviata normale usando la formula 3.

Test Z

- Possiamo quindi eseguire il cosiddetto "*Test Z*"...
- La normale tabulata è tipicamente la normale standard, per cui dobbiamo trasformare il nostro valore X nella sua deviata normale usando la formula 3.
- Per farlo, ci servono media e deviazione standard dei nostri dati!

Test Z

- Possiamo quindi eseguire il cosiddetto "*Test Z*"...
- La normale tabulata è tipicamente la normale standard, per cui dobbiamo trasformare il nostro valore X nella sua deviata normale usando la formula 3.
- Per farlo, ci servono media e deviazione standard dei nostri dati!
- A questo punto cerchiamo in tabella il valore assoluto del nostro valore di Z e leggiamo l'area sotto la curva da $|Z|$ a $+\infty$.



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Test Z

- Possiamo quindi eseguire il cosiddetto "*Test Z*"...
- La normale tabulata è tipicamente la normale standard, per cui dobbiamo trasformare il nostro valore X nella sua deviata normale usando la formula 3.
- Per farlo, ci servono media e deviazione standard dei nostri dati!
- A questo punto cerchiamo in tabella il valore assoluto del nostro valore di Z e leggiamo l'area sotto la curva da $|Z|$ a $+\infty$.
- In questo modo, il test è *a una coda*: sappiamo l'area sotto la curva da $|Z|$ a $+\infty$.

Test Z

- Possiamo quindi eseguire il cosiddetto "*Test Z*"...
- La normale tabulata è tipicamente la normale standard, per cui dobbiamo trasformare il nostro valore X nella sua deviata normale usando la formula 3.
- Per farlo, ci servono media e deviazione standard dei nostri dati!
- A questo punto cerchiamo in tabella il valore assoluto del nostro valore di Z e leggiamo l'area sotto la curva da $|Z|$ a $+\infty$.
- In questo modo, il test è *a una coda*: sappiamo l'area sotto la curva da $|Z|$ a $+\infty$.
- Se vogliamo fare un test *a due code*, dobbiamo sapere l'area sotto la curva da $-\infty$ a $-|Z|$ *e* da $|Z|$ a $+\infty$.

Test Z

- Possiamo quindi eseguire il cosiddetto "*Test Z*"...
- La normale tabulata è tipicamente la normale standard, per cui dobbiamo trasformare il nostro valore X nella sua deviata normale usando la formula 3.
- Per farlo, ci servono media e deviazione standard dei nostri dati!
- A questo punto cerchiamo in tabella il valore assoluto del nostro valore di Z e leggiamo l'area sotto la curva da $|Z|$ a $+\infty$.
- In questo modo, il test è *a una coda*: sappiamo l'area sotto la curva da $|Z|$ a $+\infty$.
- Se vogliamo fare un test *a due code*, dobbiamo sapere l'area sotto la curva da $-\infty$ a $-|Z|$ e da $|Z|$ a $+\infty$.
- Basta moltiplicare per due!