C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 23/02/2015

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. (a) Quante sequenze di 5 caratteri si possono formare con le lettere dell'insieme $\{A, B, C, D\}$? [ ]

   (b) Quante delle sequenze determinate al punto (a) non contengono la lettera B? [ ]

   (c) Quante delle sequenze determinate al punto (a) contengono esattamente due volte la lettera B? [ ]

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, calcolare:

   (a) tutte le soluzioni del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

   $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{},$$

   (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{}$, (c) $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \boxed{}$.

3. Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt[4]{x}$ $(x \geq 0)$ e il punto $x_0 = 625$. Si calcoli:

   (a) $f'(x) =$ [ ]

   (b) $f''(x) =$ [ ]

(c) il differenziale della f in x_0 e lo usi per calcolare approssimativamente $\sqrt[4]{626}$

$df(625, dx) =$; $\sqrt[4]{626} \approx$,

(d) l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(625, 5)$:

,

(e) i coefficienti a, b, c del polinomio di Taylor
$p_2(x) = a + b(x - 625) + c(x - 625)^2$ della f di grado 2 e di centro 625:

$a =$, $b =$, $c =$,

(f) $\displaystyle\int_0^{625} f(x)dx =$.

4. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$, calcolare

(a) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) =$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

(b) $f'(x) =$

(c) $f''(x) =$

(d) il punto di flesso di f:

(e) $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} f(x)\, dx =$

(integrazione per sostituzione: $x = \ln(t - 1)$)

5. Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y\left(1 - \dfrac{y}{2}\right) \\ y(0) = 4\,. \end{cases}$

$y(x) =$.

N.B.: Per l'integrazione è utile l'identità: $\dfrac{1}{y\left(1 - \frac{y}{2}\right)} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{2 - y}$.