C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 19/06/2015

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Uno studente deve rispondere a 5 domande su 10. Solo 5 su 10. Quante possibili scelte ha? $\boxed{}$ E se deve per forza scegliere almeno 2 tra le prime 5? $\boxed{}$

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$, calcolare:

   (a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

   $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{}$,

   (c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A} = \boxed{}$,

   dove $\mathbf{B}^T$ è la trasposta di $\mathbf{B}$.

3. Data la funzione $f(x) = (\ln x)^2$ $(x > 0)$, calcolare:

   (a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \boxed{}$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{}$

   (b) $f'(x) = \boxed{}$

   (c) $f''(x) = \boxed{}$

(d) il differenziale della f nel punto $e \approx 2,7$ e usarlo per calcolare approssimativamente $(\ln 3)^2$ (eseguire i calcoli a mano con una sola cifra decimale):

$df(e, dx) =$; $(\ln 3)^2 \approx$

(e) l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(e, 1)$:

(f) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro 1:

(g) i minimi e massimi relativi di f:

(h) i punti di flesso di f:

(i) $\int_1^e f(x)dx =$

(integrazione per parti, due volte).

4. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\pi-1}{2}} \operatorname{sen}(2x+1)\, dx =$

5. Un corpo abbia la temperatura T e sia posto a contatto con un ambiente che rimanga a temperatura costante T_a. Se $T_a < T$, allora la temperatura $T = T(t)$ del corpo si riduce nel tempo t secondo la *legge di raffreddamento di Newton*:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \quad (k \text{ è una costante, } k \neq 0).$$

Supponiamo che in un ambiente di 21 °C il corpo si raffreddi da 30 °C a 28 °C in 5 minuti. Partendo dalla temperatura iniziale di 30 °C, in quanto tempo il corpo raggiunge i 24 °C? Si trovi la risposta in tre passi:

(a) Si trovi la soluzione $T = T(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - 21\,^\circ\text{C}) \\ T(0) = 30\,^\circ\text{C}\,. \end{cases}$$

$T(t) =$

(b) Si usi $T(5 \text{ min}) = 28\,^\circ\text{C}$ per determinare la costante k.

$k =$

(c) Usando che $\ln(3) \approx 1,10$, $\ln(7) \approx 1,95$, $\ln(9) \approx 2,20$, si calcoli il tempo (in minuti) in cui il corpo raggiunge i 24 °C (suggerimento: conviene utilizzare la soluzione $T(t)$ di (a) in forma implicita).