

1. Le scale di temperatura Celsius, Kelvin e Fahrenheit sono scale lineari tali che  $0\text{ K} = -273.15^\circ\text{C}$  (zero assoluto),  $0^\circ\text{C} = 32^\circ\text{F} = 273.15\text{ K}$  e  $100^\circ\text{C} = 212^\circ\text{F}$ .
  - (a) Se  $T_C, T_K, T_F$  indicano la temperatura nelle scale Celsius, Kelvin e Fahrenheit rispettivamente, scrivere la funzione  $T_F = f_{FC}(T_C)$  che traduce gradi Celsius in gradi Fahrenheit, la funzione  $T_C = f_{CK}(T_K)$  che traduce kelvin in gradi Celsius e specificare il dominio di queste funzioni.
  - (b) Tra i punti  $(0, 273.15)$  e  $(273.15, 0)$ , quale appartiene al grafico di  $f_{CK}$ ?
  - (c) Qual è la funzione inversa di  $f_{FC}$  e qual è il suo dominio?
  - (d) Scrivere la funzione composta  $f_{FK} := f_{FC} \circ f_{CK}$ .
  - (e) Disegnare nello stesso sistema di riferimento i grafici di  $f_{CK}$  e  $f_{FK}$ .
  - (f) Per quale temperatura i valori delle scale Celsius e Fahrenheit coincidono?

2. Siano  $a, b, c \in \mathbf{R}$  costanti positive ( $e = 2, 7 \dots$ ). Trovare i limite delle seguenti funzioni per  $t \rightarrow +\infty$ :

- (a)  $f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$  (funzione logistica di crescita),

- (b)  $f(t) = a \left( 1 + \frac{b-a}{a - be^{c(b-a)t}} \right)$  (funzione della cinetica chimica).

Suggerimento: distinguere i casi  $a > b$ ,  $a = b$  e  $a < b$ .

3. Utilizzando il grafico di  $f(x) = e^x$ , disegnare i grafici di

$$y_1 = e^{|x|} \quad y_2 = \ln|x| \quad y_3 = e^x - 1 \quad y_4 = |e^x - 1| \quad y_5 = |\ln|x||.$$

4. Un comune foglio di carta ha uno spessore di circa  $0,072\text{ mm}$ . Se il foglio venisse piegato una prima volta in due, poi il foglio ripiegato piegato di nuovo in due, poi una terza volta e così via, 42 volte in totale, quale sarebbe lo spessore raggiunto (in km)?
5. Si ricordi che il  $p\text{H}$  di una soluzione acquosa sufficientemente diluita è stato definito da Sørensen come  $p\text{H} = -\log_{10}([\text{H}_3\text{O}^+] \text{ dm}^3/\text{mol})$ , dove  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  indica la concentrazione di  $\text{H}_3\text{O}^+$ .
  - (a) Calcolare il  $p\text{H}$  di una soluzione  $2,0 \cdot 10^{-3}\text{ M}$  di  $\text{HCl}$  ( $M = \text{mol}/\text{dm}^3$ ).
  - (b) Il  $p\text{H}$  di una soluzione è  $9,67$ , quello di un'altra  $8,67$ . Calcolare in entrambi i casi la concentrazione di  $\text{H}_3\text{O}^+$ .
6. In determinate condizioni, il numero di un certo tipo di batteri triplica ogni due giorni. Se la crescita è esponenziale, qual è l'aumento percentuale dopo 6 ore? E dopo 18 ore?
7. Si stima che la popolazione mondiale, attualmente di circa 7 miliardi di individui, aumenti dell'1,1% all'anno. Supponendo che il tasso di crescita rimanga invariato nel tempo, calcolare entro quanti anni la popolazione raddoppierà, quadruplicherà, decuplicherà.

8. Il carbonio  $^{14}\text{C}$  ha un tempo di dimezzamento di 5730 anni. Determinate l'età di un reperto organico per il quale la concentrazione di  $^{14}\text{C}$  è risultata pari al 12,5% di quella degli analoghi organismi viventi.
9. Nelle aree contaminate dall'incidente di Chernobyl e da quello di Fukushima si trovano gli isotopi del cesio  $^{137}\text{Cs}$  e  $^{134}\text{Cs}$ . Il cesio isotopo  $^{137}\text{Cs}$  perde annualmente il 2,3% della sua massa per disintegrazione radioattiva. Il cesio isotopo  $^{134}\text{Cs}$  ha un tempo di dimezzamento di 2 anni. Si ricordi che il decadimento radioattivo è esponenziale, cioè il numero  $N(t)$  di atomi residui al tempo  $t$  può essere valutato in rapporto al numero  $N_0$  di atomi radioattivi iniziali tramite la formula

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

- (a) Si trovi la costante di decadimento  $\lambda$  (unità di misura?) per il  $^{137}\text{Cs}$ .
- (b) Qual è la relazione tra il tempo di dimezzamento  $T_{1/2}$  e  $\lambda$ ? Si calcoli il tempo di dimezzamento di  $^{137}\text{Cs}$ .
- (c) Dopo quanti anni la radioattività del  $^{137}\text{Cs}$  si riduce a 1%?
- (d) Si calcoli la costante di decadimento  $\lambda$  per il  $^{134}\text{Cs}$ .
- (e) Nel 1995 è stata fatta un'analisi del rapporto dell'attività del  $^{134}\text{Cs}$  sul  $^{137}\text{Cs}$  nei funghi. Si è trovato un rapporto di 1 : 40. Il rapporto nella nube radioattiva proveniente da Chernobyl in seguito all'incidente nei primi giorni del maggio 1986 era 1 : 2.

La provenienza dei due isotopi nei funghi è da imputare alla deposizione in seguito all'incidente di Chernobyl?

- (f) Anche l'eliminazione biologica (per via urinaria, fecale e respiratoria) delle sostanze radioattive dall'organismo umano è approssimativamente esponenziale ed è caratterizzato dal tempo di dimezzamento biologico  $T_{b1/2}$ . Il cosiddetto tempo di dimezzamento effettivo  $T_{\text{eff}}$  risulta sia dal decadimento radioattivo sia dall'eliminazione biologica della sostanza radioattiva.

Trovare la relazione fra il tempo di dimezzamento effettivo  $T_{\text{eff}}$ , il tempo di dimezzamento fisico  $T_{1/2}$  e il tempo di dimezzamento biologico  $T_{b1/2}$ .

(Si noti che  $N(t) = N_0 e^{-\lambda_b t} e^{-\lambda t} = N_0 e^{-(\lambda_b + \lambda)t} = N_0 e^{-\lambda_{\text{eff}} t}$ , cioè  $\lambda_{\text{eff}} = \lambda_b + \lambda$ , e usi il risultato di (b).)

- (g) Il cesio isotopo  $^{134}\text{Cs}$  ha un tempo di dimezzamento fisico di 2 anni e un tempo di dimezzamento biologico di 110 giorni (maschi).

Calcolare il tempo di dimezzamento effettivo del cesio isotopo  $^{134}\text{Cs}$ .