C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 19. 11. 2015

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

   (a) $h(\phi) = \dfrac{\operatorname{sen} 2\phi}{\cos 3\phi}$, (b) $f(x) = \cos(e^{3x})$, (c) $f(x) = \cos(4x^2 - x + 1)$,

   (d) $U(t) = qt^{-2}$, (e) $R(s) = \dfrac{1}{a - bs}$, (f) $R(s) = \dfrac{1}{\log_{10} s}$, (g) $v(t) = (3t - 1)^{-2}$.

2. Sia f una funzione reale e x_0 un punto non isolato del suo dominio. Si dimostri che, se f è derivabile nel punto x_0, allora f è continua in quel punto.

   Suggerimento: si usi la relazione $f(x) - f(x_0) = \Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ con $\alpha \to 0$ per $x \to 0$ (lezione del 16/11/2015).

3. Le misure della lunghezza e della larghezza di un poster rettangolare sono 160 cm e 90 cm, entrambe con l' errore del 2%. Qual è l'errore percentuale (errore relativo) sull'area calcolata? Calcola la misura dell'area con l'errore assoluto.

4. Misurando il volume di un cilindro metallico si trova $V = (10,0 \pm 0,1)$ cm^3; la massa del cilindro è $m = (27,1 \pm 0,1)$ g. Calcola la densità e l'errore percentuale sulla densità.

5. Mediante il differenziale calcolare approssimativamente la quantità $\sqrt{10001}$.

6. Usare il differenziale della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ per calcolare approssimativamente $1,002^{-1}$ e $0,997^{-1}$ e confrontare i risultati con i valori precisi.

7. Si ricordi che il pH è definito come $p\mathrm{H} = -\log_{10} \mathrm{a}_{\mathrm{H}^+}$, dove $\mathrm{a}_{\mathrm{H}^+}$ indica l'attività adimensionale dei cationi ossonio.

   (a) Una soluzione abbia un pH di 4. Per quale pH l'attività $\mathrm{a}_{\mathrm{H}^+}$ risulterebbe mille volte minore?

   (b) Se il pH è stato determinato con una accuratezza di $0,02$ pH, con quale errore percentuale si conosce $\mathrm{a}_{\mathrm{H}^+}$? (Si usi il differenziale della funzione $y = f(x) = -\log_{10} x$ e il valore $\ln 10 \approx 2,3$.)

8. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione

   $$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$

   prendendo come punto iniziale $x_0 = 2$.

   N.B.: Le derivate di ordine 5 e maggiore della f sono identicamente zero, cioè il polinomio di Taylor di grado 4 è già la serie di Taylor.

9. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 4 e di centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \ln(1 + x)$.

10. Utilizzate la regola di Bernoulli-l'Hospital per calcolare i seguenti limiti:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

    Suggerimento per (c): si noti che $x^2 \ln x = \dfrac{\ln x}{x^{-2}}$.