C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 02. 12. 2016

1. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2, \quad x \neq -1,$
   (a) stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente;
   (b) stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava;
   (c) determinare i limiti: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;
   (d) disegnare il grafico;
   (e) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(0, -1)$.
2. Determinare i minimi e massimi relativi e i punti di flesso delle funzioni:
   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$; (b) $f(x) = 1 + \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}, \quad x \neq 0$;
   (c) $f(x) = \sqrt{x}\, \ln \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$; (d) $f(x) = xe^{-x}$.
3. Data la funzione $f(x) = x \ln x, \; x > 0,$
   (a) determinare gli intervalli in cui essa è crescente o decrescente;
   (b) determinare i minimi e massimi relativi;
   (c) calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e di punto iniziale $\frac{1}{e}$;
   (d) calcolare $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ applicando la regola di de l'Hospital (si noti che $f(x) = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$).
4. Utilizzate la regola di Bernoulli-l'Hospital per calcolare i seguenti limiti:
   (a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1+\cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$, (b) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{\ln x}$, (c) $\lim\limits_{x\to0^+} x^2 \ln x$

   Suggerimento per (c): si noti che $x^2 \ln x = \dfrac{\ln x}{x^{-2}}$.
5. Trovare il punto di flesso e i limiti $\lim_{t\to-\infty} N(t)$ e $\lim_{t\to+\infty} N(t)$ della seguente funzione logistica:
   $$N(t) = \frac{5}{1 + e^{-2t+3}}\,.$$