C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 13/02/2018

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Una gelateria offre 15 gusti di gelato differenti di cui 10 al prezzo di $1,50$ euro e 5 al prezzo di 2 euro. Quante coppe diverse di tre palline si possono formare:

   (a) se ognuna contiene 3 gusti di gelato differenti tra loro?

   (b) se si possono prendere 2 o 3 palline dello stesso gusto?

   (c) come (b), ma senza superare il prezzo di 5 euro per la coppa?

2. Data la funzione $f(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$, $x \in \mathbb{R}$, calcolare:

   (a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

   (Per trovare il secondo limite è utile la regola di de l'Hospital.)

   (b) $f'(x) =$

   (c) $f''(x) =$

   (d) i punti stazionari di f e classificarli:

   (e) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro 0:

   (f) i punti di flesso della f:

(g) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx =$

per sostituzione: $u = e^x + 1$; poi si usi: $\dfrac{(u-2)^2}{u^2(u-1)} = \dfrac{1}{u-1} - \dfrac{4}{u^2}$

3. Calcolare

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx =$

(b) $\displaystyle\int_0^{32} \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx =$

4. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy, e precisare il suo dominio:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y(1-y) \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(Per l'integrazione si noti: $\dfrac{1}{y(y-1)} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{1-y}$.)

$y(x) =$ dominio:

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$, (b) $\mathbf{A}^{-1} =$,

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} =$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A} =$.