**C.d.L. in Scienze naturali – Matematica** 14. 10. 2014

1. Si ricordi che il $p$H di una soluzione acquosa sufficientemente diluita è stato definito da Sørensen come $p\mathrm{H} = -\log_{10}([\mathrm{H_3O^+}]\,\mathrm{dm^3/mol})$, dove $[\mathrm{H_3O^+}]$ indica la concentrazione di $\mathrm{H_3O^+}$.

    (a) Calcolare il $p$H di una soluzione $2,0 \cdot 10^{-3} M$ di HCl ($M = \mathrm{mol/dm^3}$). $p\mathrm{H} = -\log_{10}(2,0 \times 10^{-3}) = 3 - \log_{10}(2,0)$=2,7

    (b) Il $p$H di una soluzione è $9,67$, quello di un'altra $8,67$. Calcolare in entrambi i casi la concentrazione di $\mathrm{H_3O^+}$. $[\mathrm{H_3O^+}] = 10^{-p\mathrm{H}}\mathrm{mol/dm}^3 = 2,14 \times 10^{-10}\mathrm{mol/dm}^3$ e $2,14 \times 10^{-9}\mathrm{mol/dm}^3$

2. In determinate condizioni, il numero di un certo tipo di batteri triplica ogni due giorni. Se la crescita è esponenziale, qual è l'aumento percentuale dopo 6 ore? E dopo 18 ore? Partendo da $N$ batteri, si hanno dopo un ora $3^{\frac{1}{48}}N$ batteri, dopo 6 ore $3^{\frac{6}{48}}N$ e dopo 18 ore $3^{\frac{18}{48}}N$ batteri, quindi un aumento percentuale di $(3^{\frac{1}{8}} - 1) \times 100\% = 14,72\%$ e $(3^{\frac{3}{8}} - 1) \times 100\% = 50,98\%$ rispettivamente.

3. Si stima che la popolazione mondiale, attualmente di circa 7 miliardi di individui, aumenti dell'$1,1\%$ all'anno. Supponendo che il tasso di crescita rimanga invariato nel tempo, calcolare entro quanti anni la popolazione raddoppierà, quadruplicherà, decuplicherà. Sia $n$ il numero degli anni che ci vogliono per arrivare ad $k$ volte del numero iniziale della popolazione. Allora $(1{+}0,011)^n = k$, cioè $n = \log_{1,011} k = \frac{\log k}{\log(1,011)}$. Otteniamo 63, 127 e 210 anni rispettivamente.

4. È più vantaggioso investire un capitale per 10 anni in regime di interesse semplice al tasso annuo del 5% o, sempre per 10 anni, in regime di interesse composto ad un tasso annuo del 4%? Qual è l'aumento percentuale nei due casi? Nel primo caso l'aumento percentuale è $10 \times 5\% = 50\%$, nel secondo caso $(1,04^{10} - 1) \times 100\% = 48\%$.

5. Disegnate i grafici delle funzioni $y = f(x) = x^2$ e $y = g(x) = \sqrt{x}$ per $x \geq 0$ nel sistema di riferimento $(x, y)$ della figura 1 e per $x \geq 1, y \geq 1$ in scala logaritmica nel sistema di riferimento $(X, Y)$ $(X = \log_{10} x, Y = \log_{10} y)$ della figura 2.

Figura 1

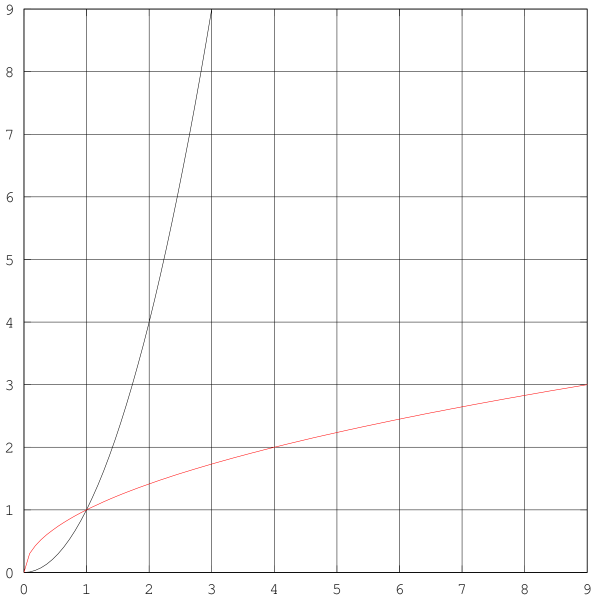
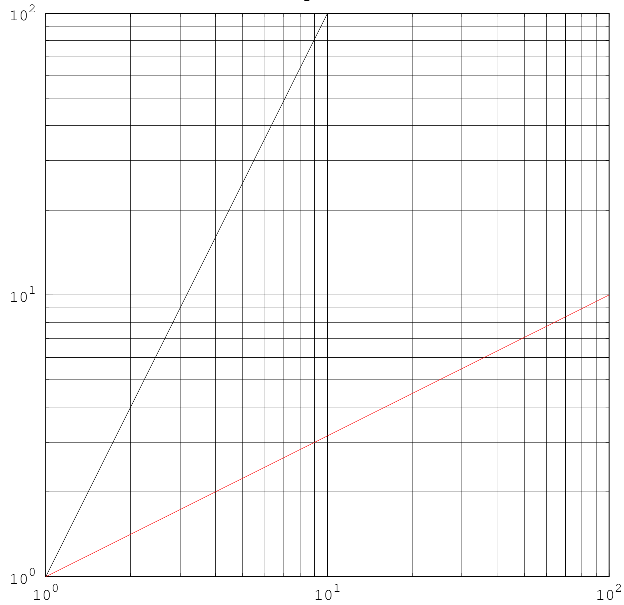



Figura 2




6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, valutare (se ciò è possibile) $\mathbf{A}+\mathbf{B}= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}+\mathbf{C}$ non è definito, $\mathbf{A}-\mathbf{B}= \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $3\mathbf{A}-\mathbf{B}= \begin{bmatrix} 11 & -8 & 3 \\ -5 & 14 & 11 \end{bmatrix}$, $\mathbf{AB}$ non è definito, $\mathbf{AC}$ non è definito, $\mathbf{CA}= \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 3 & 13 & 13 \end{bmatrix}$.

7. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, ed i vettori $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, calcolare $\mathbf{AB}= \begin{bmatrix} 9 & 18 & 37 \\ 6 & 12 & 28 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Av}= \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Bv}= \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{vw}= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{wv}= 1$.