

1. Risolvere il seguente sistema lineare (nel quale rispetto all'esempio della lezione del 27/10/2014 solo il termine noto dell'ultima equazione è stato cambiato da 8 a 9) con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 9 \end{cases} .$$

(Suggerimento: Dopo aver ridotto la matrice completa del sistema a una matrice a scala, si consiglia di riscrivere l'ultima riga di tale matrice come equazione. Qual è la conclusione che si può trarre?)

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 11 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 9 \end{array} \right] \begin{array}{l} R2 - 2R1 \rightarrow \\ R3 - R1 \rightarrow \\ R4 - \frac{3}{2}R1 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} & \frac{33}{2} \end{array} \right] \\ \\ & (R2 \leftrightarrow R3) \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} & \frac{33}{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} R4 - \frac{5}{4}R2 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \end{array} \right] \\ \\ & R4 + \frac{3}{2}R3 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] R4 \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow \text{ sistema impossibile} \end{aligned}$$

2. Risolvere il seguente sistema lineare con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = -3 \end{cases} .$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} R2 + 2R1 \rightarrow \\ R3 - R1 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 16 \\ 0 & 2 & 0 & -11 \end{array} \right] R3 + 2R2 \rightarrow \\ \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & 21 \end{array} \right] \begin{array}{l} R2 / (-1) \rightarrow \\ R3 / (-2) \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} R1 - 2R3 \rightarrow \\ R2 - R3 \rightarrow \end{array} \\ \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{2} \end{array} \right] R1 + 2R2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{2} \end{array} \right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -\frac{11}{2} \\ -\frac{21}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Si usi l'algoritmo di Gauss-Jordan per stabilire se le seguenti matrici sono invertibili e, in caso affermativo, per calcolarne l'inversa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R2 + 2R1 \rightarrow \\ R3 - R1 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R3 + R2 \rightarrow \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \mathbf{A} \text{ non è invertibile}$$

\mathbf{B} è la matrice dei coefficienti del sistema lineare di esercizio 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R2 + 2R1 \rightarrow \\ R3 - R1 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R3 + 2R2 \rightarrow \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R2/(-1) \rightarrow \\ R3/(-2) \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} R1 - 2R3 \rightarrow \\ R2 - R3 \rightarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} R1 + 2R2 \rightarrow \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $a \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ e sia $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

- (a) Si usi l'algoritmo di Gauss-Jordan per calcolare \mathbf{A}^{-1} .

(Osservazione: La formula ottenuta vale anche nel caso $a = 0$, purchè $ad - bc \neq 0$.)

- (b) Si scriva \mathbf{A}^{-1} nel caso $c = d = 0$, cioè l'inversa della matrice $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R2 - \frac{c}{a}R1 \rightarrow \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R1/a \\ aR2/(ad - bc) \rightarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{array} \right] \begin{array}{l} R1 - \frac{b}{a}R2 \rightarrow \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ in particolare nel caso (b): } \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix}.$$

5. Dati la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e il vettore $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, calcolare $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}$, dove \mathbf{v}^T è il trasposto di \mathbf{v} .

$$\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = [x, y] \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y] \begin{bmatrix} 5x - y \\ -x + 3y \end{bmatrix} = 5x^2 - 2xy + 3y^2$$