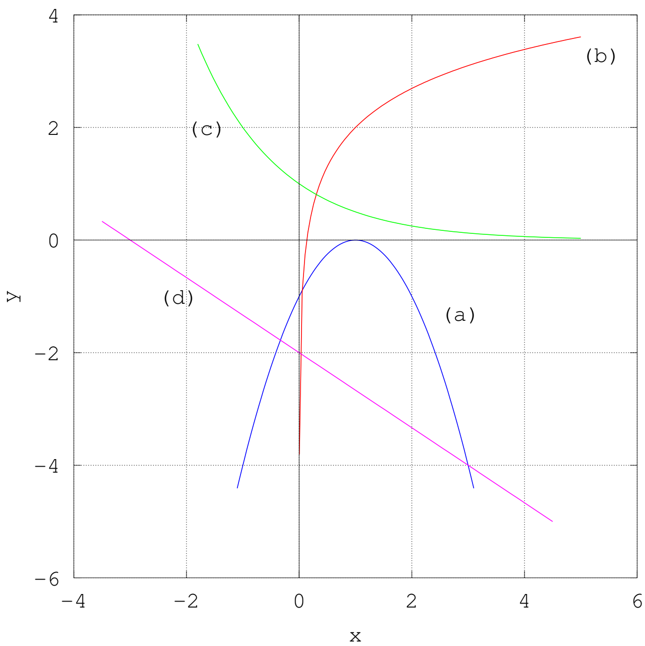
C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 16. 11. 2014

1. In figura sono tracciati 4 grafici (a), (b), (c) e (d). Individuate le funzioni corrispondenti ai 4 grafici tra le seguenti:

(A)	$y = -(x-1)^2$
(B)	$y = (x-1)^2$
(C) (d)	$y = -2(1 + \frac{x}{3})$
(D) (a)	$y = -(x-1)^2$
(E)	$y = 3(1 - \frac{x}{2})$
(F)	$y = 3(\frac{1}{2} - x)$
(G)	$y = 2 + 2^{-x}$
(H)	$y = -2^x$
(I) (c)	$y = 2^{-x}$
(L)	$y = -\ln x$
(M)	$y = \ln(-x)$
(N) (b)	$y = 2 + \ln x.$



2. Scrivere le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $f(x) = \log_{10} x$ nei punti $P = (1, f(1))$ e $Q = (10, f(10))$. Calcolare il punto di intersezione della retta tangente passante per Q con l'asse delle x. $f'(x) = \frac{1}{x}\log_{10} e = \frac{1}{x\ln(10)}$, $f'(1) = \frac{1}{\ln(10)}$, $f'(10) = \frac{1}{10\ln(10)}$, retta tangente passante per P: $y = \frac{1}{\ln(10)}(x-1)$, per Q: $y - 1 = \frac{1}{10\ln(10)}(x - 10) \approx 0.04343(x-10)$; punto di intersezione con l'asse x: $(10 - 10\ln(10), 0) \approx (-13.03, 0)$

3. È noto che la distanza s percorsa da un corpo in caduta libera (senza attrito d'aria e con velocità iniziale 0) è $s(t) = \dfrac{g}{2}t^2$, dove t è il tempo e $g \approx 9,81\ \mathrm{ms}^{-2}$ è l'accelerazione di gravità. Supponiamo che un corpo venga lasciato cadere da una quota di 30 m. Calcolate:

   (a) il tempo di caduta, (b) la velocità finale, (c) la velocità media.

   (d) In quale istante la velocità del corpo è uguale alla velocità media?

   (a) $t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = 2.47$ s, (b) $v = s'(t) = gt = 24.3$ m/s,
   (c) $v_m = 30\,\mathrm{m}/2.47\,\mathrm{s} = 12.1$ m/s $(= \frac{1}{2}v)$, (d) $\frac{v_m}{g} = 1.24\,\mathrm{s}$ $(= \frac{1}{2}t)$

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

(a) $v(t) = at + \frac{b}{t} + c$, (b) $y = 3\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x$, (c) $y = \frac{x}{x-3}$,

(a) $a - \frac{b}{t^2}$, (b) $-3\,\mathrm{sen}\,x - 2\cos x$, (c) $\frac{-3}{(x-3)^2}$,

(d) $z(t) = (1-t)\cos t$, (e) $f(y) = a\sqrt{y}\cdot\mathrm{sen}\,y$, (f) $Q(\alpha) = \frac{1-\mathrm{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha}$,

(d) $-\cos t + t\,\mathrm{sen}\,t$, (e) $a(\frac{\mathrm{sen}\,y}{2\sqrt{y}} + \sqrt{y}\cos y)$, (f) $\frac{\mathrm{sen}\,\alpha - \cos\alpha - 1}{(1+\cos\alpha)^2}$,

(g) $h(\phi) = \frac{\mathrm{sen}\,2\phi}{\cos 3\phi}$, (h) $f(x) = \cos(e^{3x})$, (i) $f(x) = \cos(4x^2 - x + 1)$

(g) $\frac{2\cos 2\phi\cos 3\phi + 3\,\mathrm{sen}\,2\phi\,\mathrm{sen}\,3\phi}{\cos^2 3\phi}$, (h) $-3e^{3x}\,\mathrm{sen}(e^{3x})$, (i) $(-8x+1)\,\mathrm{sen}(4x^2 - x + 1)$.

5. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

   (a) $U(t) = qt^{-2}$, (b) $R(s) = \frac{1}{a - bs}$, (c) $R(s) = \frac{1}{\log_{10} s}$, (d) $v(t) = (3t-1)^{-2}$,

   (a) $-2qt^{-3}$, (b) $\frac{b}{(a-bs)^2}$, (c) $-\frac{\log_{10} e}{s(\log_{10} s)^2}$, (d) $-6(3t-1)^3$,

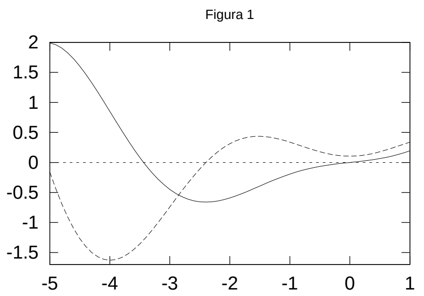
   (e) $y = \frac{x+1}{x-2}$, (f) $y = x\cdot\log_{10} x$, (g) $y = x\cdot\cos x$, (h) $f(x) = x\cdot\mathrm{sen}(|x|)$.

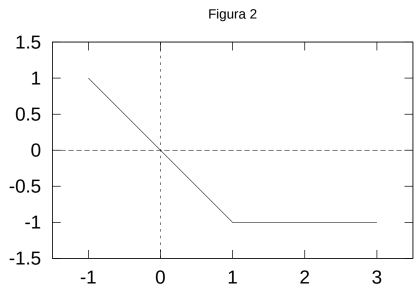
   (e) $-\frac{3}{(x-2)^2}$, (f) $\log_{10} x + \log_{10} e$, (g) $\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x$, (h) $\mathrm{sen}\,|x| + |x|\cos x$.

   Dire se la funzione f di (h) è derivabile anche nell'origine (motivare la risposta) e, in caso affermativo, calcolare $f'(0)$.
   $f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{sen}\,|\Delta x| = 0$, cioè per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $f'(x) = \mathrm{sen}\,|x| + |x|\cos x$.

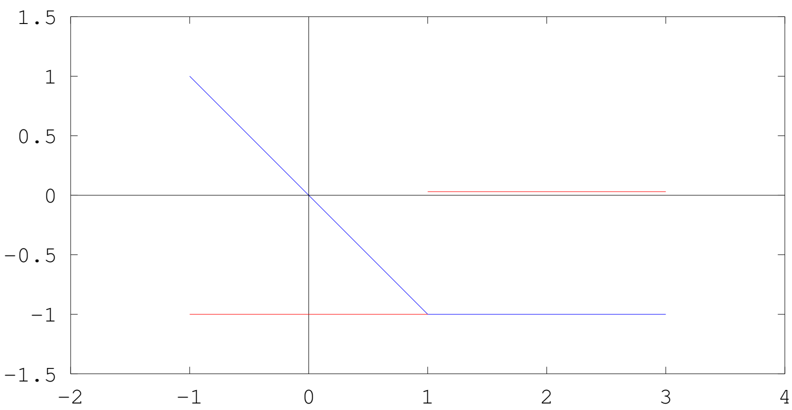
6. In fig. 1 sono riportati i grafici di due funzioni reali di cui una è la derivata dell'altra. È f (curva tratteggiata) la derivata di g (curva continua) o è g la derivata di f?

   Disegnate il grafico della derivata della funzione il cui grafico è riportato in fig. 2. In quale punto la funzione non è derivabile? in $x = 1$





$f = g'$, cioè la curva tratteggiata è la derivata (in $[-5,-4]$ entrambe le funzioni sono monotone decrescenti e quindi lì la loro derivata deve essere negativa, ma solo la f è negativa; oppure: nei punti di minimi o massimi relativi la derivata deve annullarsi, ciò capita per la f tra -3 e -2 dove g assume un minimo).



Il grafico rosso è la derivata.

7. Le misure della lunghezza e della larghezza di un poster rettangolare sono 160cm e 90cm, entrambe con l' errore del 2%. Qual è l'errore percentuale (errore relativo) sull'area calcolata? Calcola la misura dell'area con l'errore assoluto.
   L'errore relativo di un prodotto è la somma degli errori relativi dei singoli fattori. Quindi l'errore percentuale sull'area calcolata è del 4%. Ne segue che l'area è pari a $(1,44 \pm 0,06)\mathrm{m}^2$.
   Gli stessi risultati si ottengono calcolando valore min $= (160 + 0,02 \cdot 160) \cdot (90 + 0,02 \cdot 90)\mathrm{cm}^2 = 1,50\mathrm{m}^2$ e valore min $= (160 - 0,02 \cdot 160) \cdot (90 - 0,02 \cdot 90)\mathrm{cm}^2 = 1,38\mathrm{m}^2$.
   Nota: Dalla precisione indicata attraverso gli errori percentuali segue che si hanno 3 cifre significative.

8. Misurando il volume di un cilindro metallico si trova $V = 10,0$ cm$^3 \pm 0,1$ cm^3; la massa del cilindro è $m = 27,1$ g $\pm\, 0,1$ g. Calcola la densità e l'errore percentuale sulla densità.
   valore max $= 27,2 : 9,9\,\mathrm{g/cm^3} = 2,75\,\mathrm{g/cm^3}$, valore min $= 27,0 : 10,1\,\mathrm{g/cm^3} = 2,67\,\mathrm{g/cm^3}$, ne segue che la densità è uguale a $(2,71 \pm 0,04)$ g/cm^3 e l'errore sulla densità è del $0,04/2,71 \cdot 100\% = 1,5\%$.
   2$^{\mathrm{o}}$ metodo
   L'errore relativo di un quoziente è la somma degli errori relativi del numeratore e del denominatore: $(0,1/27,1 + 0,1/10,0) \cdot 100\% = 1,4\%$. Ne segue che la densità è $(2,71 \pm 2,71 \cdot 0,014)\mathrm{g/cm^3} = (2,71 \pm 0,04)\mathrm{g/cm^3}$.

9. Mediante il differenziale calcolare approssimativamente la quantità $\sqrt{10001}$.
   $y = f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 10000, f(x_0) = 100, \Delta x = 1, \Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200} = 0,005, \sqrt{10001} = 100 + \Delta y \approx 100 + dy = 100,005.$

10. Usare il differenziale della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ per calcolare approssimativamente $1,002^{-1}$ e $0,997^{-1}$ e confrontare i risultati con i valori precisi.
    $df(x, \Delta x) = -\frac{1}{x^2}\Delta x$, $df(1, \Delta x) = -\Delta x$, quindi $1,002^{-1} \approx 1 - df(1; 0,002) = 1 - 0,002 = 0,998$; analogamente $0,997^{-1} \approx 1 + 0,003 = 1,003$.
    I valori precisi sono $0,9980\ldots$ e $1,0030\ldots$ rispettivamente.

11. Si ricordi che il pH è definito come $p\mathrm{H} = -\log_{10} \mathrm{a_{H^+}}$, dove $\mathrm{a_{H^+}}$ indica l'attività adimensionale dei cationi ossonio.

    (a) Una soluzione abbia un pH di 4. Per quale pH l'attività $\mathrm{a_{H^+}}$ risulterebbe mille volte minore?

    (b) Se il pH è stato determinato con una accuratezza di un decimo di pH, con quale errore percentuale si conosce $\mathrm{a_{H^+}}$? (Si usi il differenziale della funzione $y = f(x) = -\log_{10} x$ e il valore $\log_{10} e \approx 0,434$.)
    Da $dy = -\log_{10} e \, \frac{\Delta x}{x} \approx -0,434 \frac{\Delta x}{x}$ si ottiene $\frac{\Delta x}{x} \approx -2,3\Delta y$, ossia $\frac{\Delta \mathrm{a_{H^+}}}{\mathrm{a_{H^+}}} \approx -2,3\,\Delta p\mathrm{H}$ e l'errore percentuale è $\left|\frac{\Delta \mathrm{a_{H^+}}}{\mathrm{a_{H^+}}} 100\%\right| \approx 2,3 \cdot 0,1 \cdot 100\% = 23\%$.
    Nota: Un calcolo preciso (senza utilizzare il differenziale) mostra che alla variazione di $\pm 0,1$ del pH corrisponde una variazione di $\mathrm{a_{H^+}}$ del -21% e del $+26\%$ rispettivamente.

12. Data la funzione $f(x) = x \ln x, \;\; x > 0$,

    (a) determinare gli intervalli in cui essa è crescente o decrescente; $f'(x) = 1 + \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq -1 \Leftrightarrow x = e^{\ln x} \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$; per $0 < x \leq \frac{1}{e}$ la f è decrescente e per $x \geq \frac{1}{e}$ crescente.

    (b) determinare gli estremanti;
    Da (a) segue che $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$ è un punti di minimo relativo e assoluto di f.

    (c) calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e di punto iniziale $\frac{1}{e}$;
    $p_2(x) = f(\frac{1}{e}) + f'(\frac{1}{e})(x - \frac{1}{e}) + \frac{1}{2} f''(\frac{1}{e})(x - \frac{1}{e})^2 = -\frac{1}{e} + \frac{e}{2}(x - \frac{1}{e})^2$

    (d) calcolare $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ applicando la regola di de l'Hospital (si noti che $f(x) = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$).

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0^- \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^- = 0$$