C.d.L. in Scienze naturali – Matematica

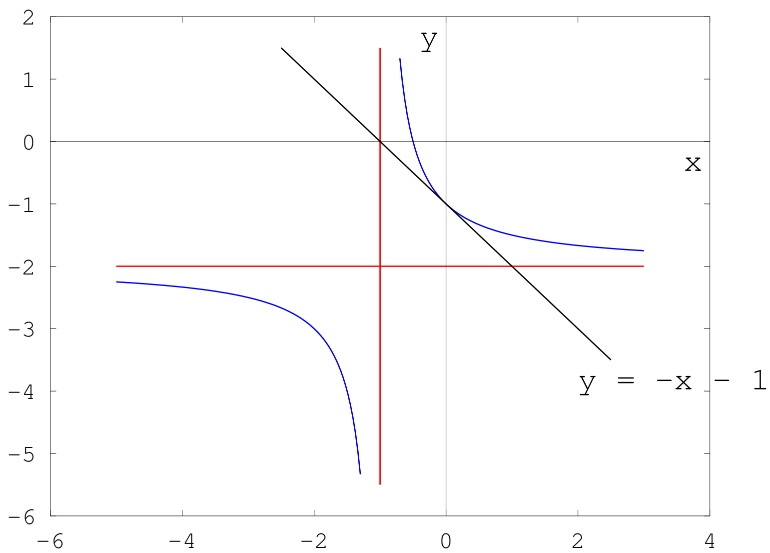
23. 11. 2014

1. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2, \quad x \neq -1,$

   (a) stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente; $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \ \forall x \neq 0 \Rightarrow f$ è monotona decrescente in $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

   (b) determinare gli asintoti; le rette di equazioni $y = -2$ e $x = -1$ sono asintoto orizzontale e verticale (sinistro discendente e destro ascendente) rispettivamente

   (c) disegnare il grafico;



   (d) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(0, -1)$. $y + 1 = f'(0)x$, ossia $y = -x - 1$

2. Determinare i minimi e massimi relativi e i punti di flesso delle funzioni:

   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x;$

   $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3);$

   $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1);$

   (b) $f(x) = 1 + \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}, \quad x \neq 0;$

   $f'(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{x^2}, \quad x \neq 0;$

   $f''(x) = \dfrac{6}{x^3}, \quad x \neq 0;$

   (c) $f(x) = \sqrt{x}\,\ln\dfrac{1}{x} = -\sqrt{x}\,\ln x, \quad x > 0;$

   $f'(x) = \dfrac{-\ln x - 2}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0;$

   $f''(x) = \dfrac{\ln x}{4x\sqrt{x}}, \quad x > 0;$

   (d) $f(x) = xe^{-x}.$

   $f'(x) = (1-x)e^{-x};$

   $f''(x) = (x-2)e^{-x}.$

   Dallo studio del cambiamento del segno della derivata prima si ottengono i punti di minimi (m) e i massimi (M) relativi; dallo studio del cambiamento del segno della derivata seconda si ottengono i punti di flesso (F):

(a) $M=(-1,5),\ m=(3,-27),\ F=(1,-11)$; (b) $M=(-3,-1),\ m(3,3)$;
(c) $M=(e^{-2},2e^{-1}),\ F=(1,0)$ (discendente); (d) $M=(1,e^{-1}),\ F=(2,2e^{-2})$.

I flessi di (a) e (d) sono ascendenti.

3. Calcolare gli integrali:

(a) $\displaystyle\int_2^3 x^5\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} x^{-5}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}x+\cos x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^9 4\sqrt{x}\,dx$, (e) $\displaystyle\int_0^2 \frac{6x^2+4x+2}{\sqrt{x}}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_1^e -\frac{1}{x}\,dx$.

(a) $\displaystyle\left[\frac{1}{6}x^6\right]_2^3=\frac{665}{6}$, (b) $\displaystyle\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_{-2}^{-1}=-\frac{15}{64}$, (c) $[-\cos x+\operatorname{sen}x]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$,

(d) $\displaystyle\left[\frac{8}{3}x\sqrt{x}\right]_0^9=72$, (f) $[-\ln|x|]_1^e=-1$,

(e) $\displaystyle\int_0^2(6x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}})\,dx=\left[\frac{12}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}\right]_0^2=\frac{284}{15}\sqrt{2}$

4. Calcolare gli integrali indefiniti con il metodo di integrazione per parti:

(a) $\displaystyle\int x\log_{10}x\,dx$, (b) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$, (c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,dx$, (d) $\displaystyle\int x2^x\,dx$.

(a) $\displaystyle\frac{1}{2}x^2\log_{10}x-\frac{1}{2}\int x\log_{10}e\,dx=\frac{1}{2}x^2\log_{10}x-\frac{1}{4}x^2\log_{10}e+c$,

(b) $\displaystyle x\operatorname{sen}x-\int\operatorname{sen}x\,dx=x\operatorname{sen}x+\cos x+c$,

(c) $\displaystyle\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{2}{3}\int\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{4}{9}x\sqrt{x}+c=\frac{2}{9}x\sqrt{x}(3\ln x-2)+c$,

(d) $\displaystyle\frac{x2^x}{\ln 2}-\int\frac{2^x}{\ln 2}\,dx=\frac{x2^x}{\ln 2}-\frac{2^x}{(\ln 2)^2}+c=\frac{2^x(x\ln 2-1)}{(\ln 2)^2}+c$.

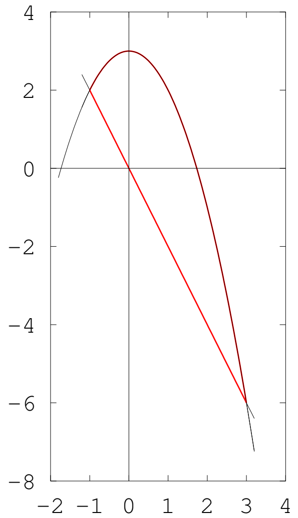
5. Calcolare gli integrali: (a) $\displaystyle\int_{-e}^{-1}x^{-1}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_2^3(3x-5)^{-2}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_1^4\frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_1^2 xe^{-x}\,dx$, (e) $\displaystyle\int_{-3}^0\frac{1}{\sqrt{1-5x}}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}x\operatorname{sen}(3x)\,dx$, (g) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}x}{3+\cos x}\,dx$ (sost. $u=3+\cos x$), (h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^4\operatorname{sen}x\,dx$ (sost. $u=1-\cos x$), (i) $\displaystyle\int_0^2\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ (sost. $u=\sqrt{x+1}$), (k) $\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ (per parti).

(a) $[\ln|x|]_{-e}^{-1}=\ln 1-\ln e=-1$, (b) $-\frac{1}{3}[(3x-5)^{-1}]_2^3=-\frac{1}{3}(\frac{1}{4}-1)=\frac{1}{4}$, (c) $\displaystyle\int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}\,dx=-2[x^{-\frac{1}{2}}]_1^4=-2\left(\frac{1}{2}-1\right)=1$, (d) per parti: $\displaystyle[-xe^{-x}]_1^2+\int_1^2 e^{-x}\,dx=-\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e}-[e^{-x}]_1^2=\frac{2}{e}-\frac{3}{e^2}=\frac{2e-3}{e^2}$, (e) $-\frac{2}{5}\left[\sqrt{1-5x}\right]_{-3}^0=-\frac{2}{5}(1-4)=\frac{6}{5}$, (f) per parti: $\displaystyle-\frac{1}{3}[x\cos(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos(3x)\,dx=0+\frac{1}{9}[\operatorname{sen}(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}}=$

$\frac{1}{9}$, (g) $-\displaystyle\int_0^\pi \frac{-\operatorname{sen} x}{3+\cos x}\,dx = -\left[\ln|3+\cos x|\right]_0^\pi = -(\ln 2 - \ln 4) = \ln 4 - \ln 2 = \ln\frac{4}{2} = \ln 2$, (h) $du = \operatorname{sen} x\,dx$; $\displaystyle\int_0^1 u^4\,du = \frac{1}{5}\left[u^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}$, (i) $du = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$; $2\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} (u^2-1)\,du = 2\left[\frac{1}{3}u^3 - u\right]_1^{\sqrt{3}} = 2\left[(\sqrt{3}-\sqrt{3}) - \left(\frac{1}{3}-1\right)\right] = \frac{4}{3}$,
(k) $2\left[\sqrt{x}\ln x\right]_1^e - 2\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx = 2\sqrt{e} - 2\int_1^e x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{e} - 4\left[\sqrt{x}\right]_1^e = 4 - 2\sqrt{e}$.

6. Calcolare l'area della regione limitata di piano compresa tra il grafico di $y = \operatorname{sen}(\frac{x}{3})$ e l'asse x, al variare di x nell'intervallo $[0, \pi]$.
$\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)\,dx = -3\left[\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^\pi = -3\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{3}{2}$

7. Si trovi l'area limitata dalla parabola $y = 3 - x^2$ e dalla retta $y = -2x$ (disegno!).



$$\int_{-1}^{3} \left[(3-x^2) - (-2x)\right]\,dx = \frac{32}{3}$$