C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 14/01/2015

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Data la funzione $f(x) = x^3 \ln x, \quad x \in \mathbb{R},\ x > 0$,

   (a) determinare $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \boxed{0, \quad \text{perché } \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-3})'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = 0^-}$

   (applicare la regola di de l'Hospital: $f(x) = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}$)

   (b) calcolare $f'(x) = \boxed{(x^3)' \ln x + x^3 (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(1 + 3\ln x)}$

   (c) calcolare $f''(x) = \boxed{2x(1 + 3\ln x) + x^2 \cdot \frac{3}{x} = x(5 + 6\ln x)}$

   (d) trovare e classificare il punto stazionario x_0 di f:

   $x_0 = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, si tratta di un punto di minimo locale (e assoluto)

   (e) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto (e, e^3):

   $y = e^3 + f'(e)(x - e) = e^3 + 4e^2(x - e) = 4e^2 x - 3e^3$

   (f) calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e di punto iniziale e:

   $$\begin{aligned} p_2(x) &= 4e^2x - 3e^3 + \frac{1}{2!} f''(e)(x-e)^2 = 4e^2x - 3e^3 + \frac{11}{2} e(x-e)^2 \\ &= \frac{e}{2}(11x^2 - 14ex + 5e^2) \end{aligned}$$

   (g) trovare gli intervalli di convessità/concavità e il punto di flesso di f:

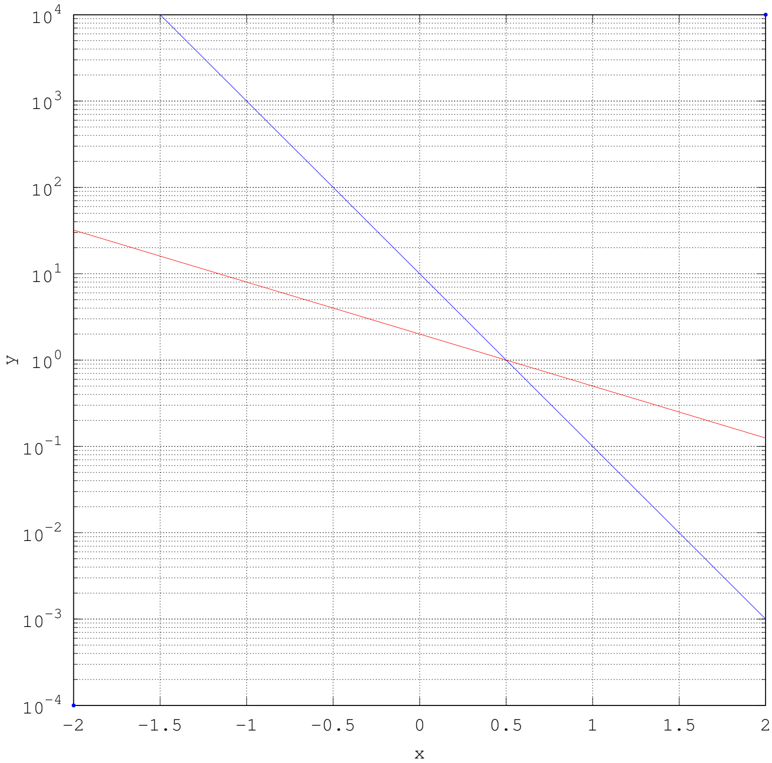
   $f(x)$ è convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 5 + 6\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{5}{6}}$, cioè la f è concava per $0 < x \leq e^{-\frac{5}{6}}$, convessa per $x \geq e^{-\frac{5}{6}}$, flesso: $(e^{-\frac{5}{6}}, -\frac{5}{6e^2\sqrt{e}})$

   (h) calcolare $\int_1^e f(x)\,dx$ (integrazione per parti):

   $$\int_1^e f(x)\,dx = \boxed{\left[\frac{1}{4}x^4 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{4}x^3\,dx = \frac{1}{4}e^4 - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^e = \frac{1}{16}(3e^4 + 1)}$$

2. Disegnate i grafici delle funzioni $f(x) = 10^{-2x+1}$ e $g(x) = 2^{-2x+1}$ in scala semilogaritmica nel sistema di riferimento della figura 1.
   $\log_{10} f(x) = -2x + 1$,
   $\log_2 g(x) = \frac{\log_{10} g(x)}{\log_{10} 2} = -2x + 1 \Rightarrow \log_{10} g(x) = (-2x+1)\log_{10} 2$

Figura 1



3. La concentrazione $C = C(t)$ di un soluto in funzione del tempo t sia soluzione del seguente problema di Cauchy (omettendo le unità di misura):

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = 4(80 - C) \\ C(0) = 20\,. \end{cases}$$

   (a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy.

   $\boxed{C(t) = 80 - 60e^{-4t} = 20(4 - 3e^{-4t}), \quad t \geq 0}$

   (b) Si trovi il limite di $C(t)$ per $t \to +\infty$. $\boxed{\lim_{t\to+\infty} C(t) = 80}$

   (c) Usando la risposta di (a) e il valore $\ln(2) \approx 0,69$, si determini t in modo tale che $C(t) = 50$. $\boxed{t = \frac{1}{4}\ln 2 \approx 0,17}$

   (a) $\int_{20}^{C} \frac{dC}{80-C} = 4\int_0^t dt \Rightarrow [-\ln|80-C|]_{20}^{C} = 4t$, poiché $C(0) = 20$ si ha $80 - C > 0 \Rightarrow \frac{80-C}{80-20} = e^{-4t} \Rightarrow C = 80 - 60e^{-4t}$, $t \geq 0$

   (c) $50 = 80 - 60e^{-4t} \Rightarrow e^{-4t} = \frac{1}{2} \Rightarrow -4t = \ln 1 - \ln 2 \Rightarrow t = \frac{1}{4}\ln 2 \approx 0,17$

C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 14/01/2015

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Data la funzione $f(x) = x^4 \ln x, \quad x \in \mathbb{R},\ x > 0,$

   (a) determinare $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$ $\boxed{0, \quad \text{perché } \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-4})'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{4}{x^5}} = 0^-}$

   (applicare la regola di de l'Hospital: $f(x) = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}$)

   (b) calcolare $f'(x) =$ $\boxed{(x^4)' \ln x + x^4 (\ln x)' = 4x^3 \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} = x^3(1 + 4\ln x)}$

   (c) calcolare $f''(x) =$ $\boxed{3x^2(1 + 4\ln x) + x^3 \cdot \frac{4}{x} = x^2(7 + 12\ln x)}$

   (d) trovare e classificare il punto stazionario x_0 di f:

   $x_0 = e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$, si tratta di un punto di minimo locale (e assoluto)

   (e) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(1, 0)$:

   $y = 0 + f'(1)(x - 1) = x - 1$

   (f) calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e di punto iniziale e:

   $p_2(x) = x - 1 + \frac{1}{2!} f''(1)(x - 1)^2 = x - 1 + \frac{7}{2}(x - 1)^2 = \frac{1}{2}(7x^2 - 12x + 5)$

   (g) trovare gli intervalli di convessità/concavità e il punto di flesso di f:

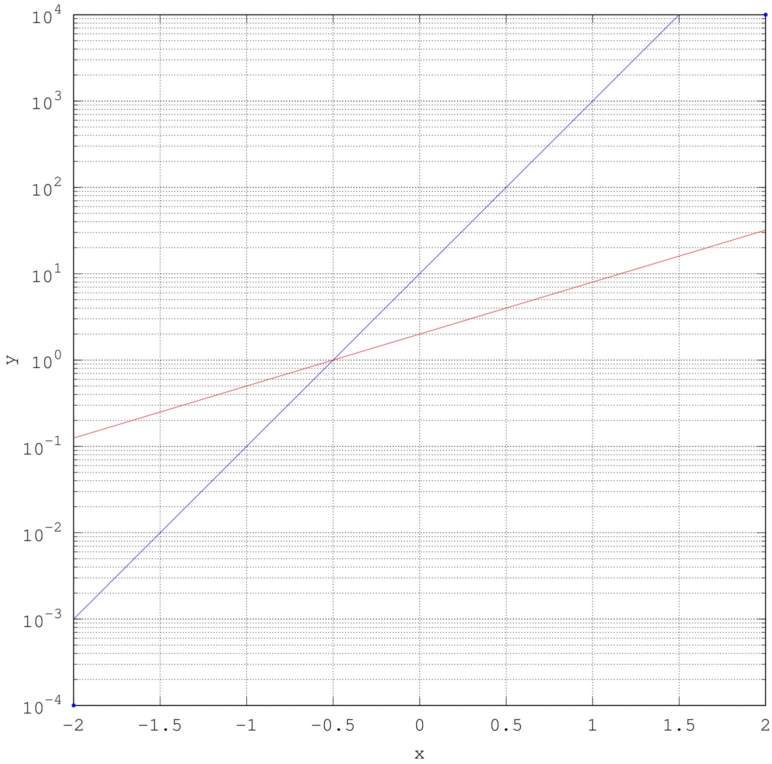
   $f(x)$ è convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 7 + 12\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{7}{12}}$, cioè la f è concava per $0 < x \leq e^{-\frac{7}{12}}$, convessa per $x \geq e^{-\frac{7}{12}}$, flesso: $(e^{-\frac{7}{12}}, -\frac{7}{12e^2\sqrt[3]{e}})$

   (h) calcolare $\int_1^e f(x)\, dx$ (integrazione per parti):

   $$\int_1^e f(x)\, dx = \boxed{\left[\frac{1}{5}x^5 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{5}x^4\, dx = \frac{1}{5}e^5 - \left[\frac{x^5}{25}\right]_1^e = \frac{1}{25}(4e^5 + 1)}$$

2. Disegnate i grafici delle funzioni $f(x) = 10^{2x+1}$ e $g(x) = 2^{2x+1}$ in scala semilogaritmica nel sistema di riferimento della figura 1.
$\log_{10} f(x) = 2x + 1$,
$\log_2 g(x) = \frac{\log_{10} g(x)}{\log_{10} 2} = 2x + 1 \Rightarrow \log_{10} g(x) = (2x + 1) \log_{10} 2$

Figura 1



3. La concentrazione $C = C(t)$ di un soluto in funzione del tempo t sia soluzione del seguente problema di Cauchy (omettendo le unità di misura):

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = 2(40 - C) \\ C(0) = 20\,. \end{cases}$$

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy.

$$\boxed{C(t) = 40 - 20e^{-2t} = 20(2 - e^{-2t}), \quad t \geq 0}$$

(b) Si trovi il limite di $C(t)$ per $t \to +\infty$. $\boxed{\lim_{t \to +\infty} C(t) = 40}$

(c) Usando la risposta di (a) e il valore $\ln(2) \approx 0,69$, si determini t in modo tale che $C(t) = 30$. $\boxed{t = \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,35}$

(a) $\int_{20}^{C} \frac{dC}{40-C} = 2 \int_0^t dt \Rightarrow [-\ln|40 - C|]_{20}^{C} = 2t,$ poiché $C(0) = 20$ si ha $40 - C > 0 \Rightarrow \frac{40-C}{40-20} = e^{-2t} \Rightarrow C = 40 - 20e^{-2t}, \ t \geq 0$

(c) $30 = 40 - 20e^{-2t} \Rightarrow e^{-2t} = \frac{1}{2} \Rightarrow -2t = \ln 1 - \ln 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,35$