C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 09/07/2015

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Quante password differenti di 8 caratteri si possono generare utilizzando un alfabeto di 26 lettere (solo minuscole)? $\boxed{26^8}$ E se nelle password non è possibile ripetere uno stesso carattere? $\boxed{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}$

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 5 & -9 & 9 & -3 \\ -3 & 8 & -5 & -4 \\ -2 & 6 & -3 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 5 & 1 \\ 11 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$, calcolare:

   (a) **tutte le soluzioni** reali del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{11}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}}$

   (b) (se ciò è possibile) (b) $\mathbf{A}^{-1} =$ $\boxed{\text{A \underline{non} è invertibile}}$, $\mathbf{AB} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & -9 & 9 & -3 & 2 \\ -3 & 8 & -5 & -4 & -4 \\ -2 & 6 & -3 & -5 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2-5R1 \\ R3+3R1 \\ R4+2R1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -7 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -7 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R3-2R2 \\ \text{superflua } (=R3) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -11 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R3/3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -\frac{8}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} R1-2R3 \\ R2+R3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & \frac{19}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -\frac{8}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} R1+2R2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -\frac{8}{3} \end{array}\right]$$

variabile libera: $x_4 = t$

3. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ $(x > 0,\ x \neq 1)$, calcolare:

   (a) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \boxed{-\infty}$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \boxed{+\infty}$

   (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \boxed{-\infty \overset{}{\underset{H}{\Longleftarrow}} \lim_{x \to 0^+} \frac{(\frac{1}{x})'}{(\ln x)'} = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{x}{x^2}\right) = -\infty}$

   (applicare la regola di de l'Hospital: $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$)

(c) $f'(x) = \boxed{\left[(x \cdot \ln x)^{-1} \right]' = -\frac{(x \cdot \ln x)'}{(x \cdot \ln x)^2} = -\frac{1+\ln x}{x^2 (\ln x)^2}}$

(d) $f''(x) = \boxed{\left[-(1+\ln x)(x \ln x)^{-2}\right]' = -\frac{1}{x^3 (\ln x)^2} + \frac{2(1+\ln x)^2}{x^3 (\ln x)^3} = \frac{2(\ln x)^2 + 3\ln x + 2}{x^3 (\ln x)^3}}$

(e) il punto stazionario x_0 di f e classificarlo: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

$x_0 = e^{-1} = \frac{1}{e}$, si tratta di un punto di mass. rel., $f''(e^{-1}) = -e^3 < 0$

(f) l'equazione della retta tangente al grafico della f nel punto $(e, \frac{1}{e})$:

$$y - \frac{1}{e} = f'(e)(x-e) = -\frac{2}{e^2}(x-e)$$

(g) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro e:

$$\frac{1}{e} - \frac{2}{e^2}(x-e) + \frac{1}{2!} f''(e)(x-e)^2 = \frac{1}{e} - \frac{2}{e^2}(x-e) + \frac{7}{2e^3}(x-e)^2$$

(h) gli intervalli di convessità della f: $x > 1 \quad (\Leftrightarrow f''(x) > 0)$

(i) $\int_e^{e^2} f(x)dx = \boxed{\int_1^2 \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^2 = \ln 2}$

(integrazione per sostituzione: $t = \ln x$). $dt = \frac{1}{x} dx$

4. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}} \cos(2x+1)\, dx = \boxed{\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = \frac{1}{2}[\operatorname{sen} t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}}$

sost. $t = 2x+1$, $dx = \frac{1}{2} dt$

5. Nella reazione chimica

$$2\,NOBr\,(g) \longrightarrow 2\,NO\,(g) + Br_2\,(g)$$

la concentrazione x di NOBr in funzione del tempo t è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -kx^2 \\ x(0) = x_0\,, \end{cases} \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{-x^2} = k \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = kt$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} + kt$$

dove k è una costante positiva ed x_0 la concentrazione iniziale di NOBr. A una temperatura di 10 °C si ha $k = 0{,}810\, M^{-1}s^{-1}$.

(a) Si calcoli la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy.

$x(t) = \boxed{\frac{1}{\frac{1}{x_0} + kt}, \quad t \geq 0}$

(b) Si calcoli la concentrazione di NOBr dopo 15 minuti dall'inizio della reazione a 10°C, quando la concentrazione iniziale era di $4{,}0 \cdot 10^{-3}$M.

$\boxed{1{,}0 \cdot 10^{-3}\ M}$ $\quad \frac{1}{0{,}25 \cdot 10^3 + 15 \cdot 60 \cdot 0{,}81} M = \frac{1}{250 + 729} M = \frac{1}{979} M \approx \frac{1}{1000} M$

(c) Dopo quanti minuti la concentrazione iniziale di NOBr sarà dimezzata?

$\boxed{5\ \text{min.}}$ Dipende il tempo di dimezzamento dalla concentrazione iniziale? Sì: ☒ No: ☐

$$\frac{1}{\frac{x_0}{2}} = \frac{1}{x_0} + kt_{1/2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{1}{kx_0} = \frac{250}{0{,}81}\, s \approx 300\, s = 5\ \text{min.}$$