C.d.L. in Scienze naturali – Matematica

29. 10. 2015

1. Le scale di temperatura Celsius, Kelvin e Fahrenheit sono scale lineari tali che $0\,\mathrm{K} = -273.15°\mathrm{C}$ (zero assoluto), $0°\mathrm{C} = 32°\mathrm{F} = 273.15\,\mathrm{K}$ e $100°\mathrm{C} = 212°\mathrm{F}$.

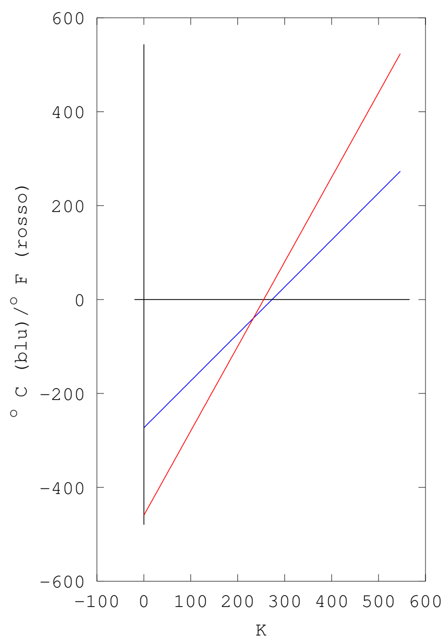
   (a) Se T_C, T_K, T_F indicano la temperatura nelle scale Celsius, Kelvin e Fahrenheit rispettivamente, scrivere la funzione $T_F = f_{FC}(T_C)$ che traduce gradi Celsius in gradi Fahrenheit, la funzione $T_C = f_{CK}(T_K)$ che traduce kelvin in gradi Celsius e specificare il dominio di queste funzioni.
   Il grafico di f_{FC} è una retta passante per i punti $(0, 32)$ e $(100, 212)$. Ne segue: $T_F = f_{FC}(T_C) = \frac{212-32}{100-0}T_C + 32 = \frac{9}{5}T_C + 32$, dominio: $T_C \geq -273.15$.
   Il grafico di f_{CK} è una retta passante per i punti $(0, -273.15)$ e $(273.15, 0)$. Ne segue: $T_C = f_{CK}(T_K) = T_K - 273.15$, dominio: $T_K \geq 0$.

   (b) Tra i punti $(0, 273.15)$ e $(273.15, 0)$, quale appartiene al grafico di f_{CK}?
   solo il secondo

   (c) Qual è la funzione inversa di f_{FC} e qual è il suo dominio?
   $f_{FC}^{-1}(T_F) = T_C = \frac{5}{9}T_F - \frac{160}{9}$, dominio: $T_F \geq -\frac{9}{5} \times 273.15 + 32 = -459.67$

   (d) Scrivere la funzione composta $f_{FK} := f_{FC} \circ f_{CK}$.
   $f_{FK} = T_F = \frac{9}{5}(T_K - 273.15) + 32 = \frac{9}{5}T_K - 459.67$, dominio: $T_K \geq 0$

   (e) Disegnare nello stesso sistema di riferimento i grafici di f_{CK} e f_{FK}.



   (f) Per quale temperatura i valori delle scale Celsius e Fahrenheit coincidono?
   $T_F = f_{FC}(T_C) = T_C =: T \Rightarrow T = \frac{9}{5}T + 32 \Rightarrow T = -40$

2. Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$ costanti positive ($e = 2,7\ldots$). Trovare i limite delle seguenti funzioni per $t \to +\infty$:

(a) $f(t) = \dfrac{a}{1+be^{-ct}}$ (funzione logistica di crescita),
da $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ segue che $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = a$

(b) $f(t) = a\left(1 + \dfrac{b-a}{a-be^{c(b-a)t}}\right)$ (funzione della cinetica chimica).

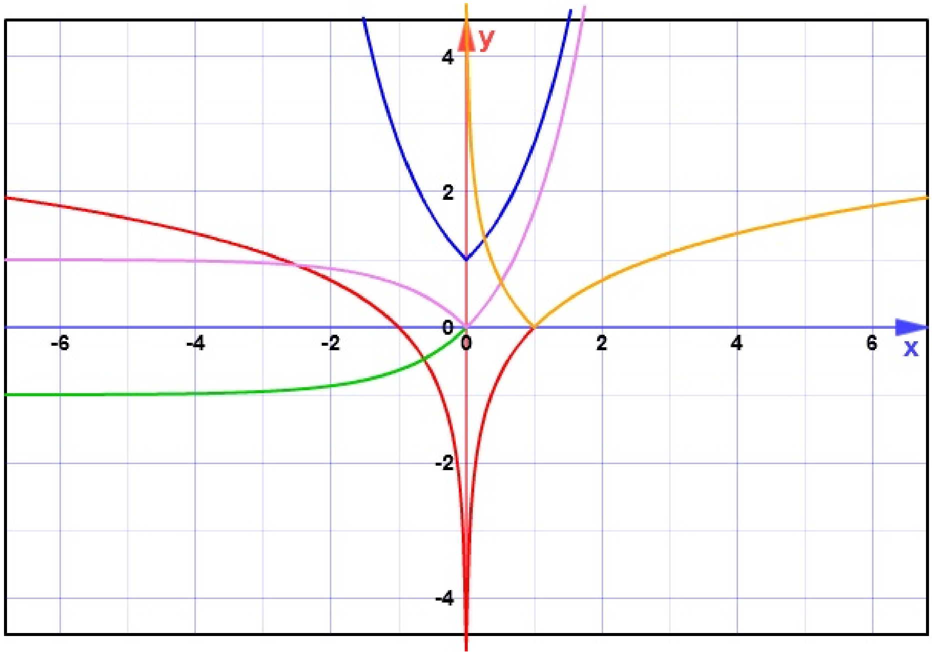
Suggerimento: distinguere i casi $a > b$, $a = b$ e $a < b$.
se $a > b \Rightarrow b - a < 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} be^{c(b-a)t} = 0$
$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} f(t) = a\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) = b$;

se $a = b$, la f di sopra non è definita;

se $a < b \Rightarrow b-a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} be^{c(b-a)t} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = a(1+0) = a$

3. Utilizzando il grafico di $f(x) = e^x$, disegnare i grafici di

$y_1 = e^{|x|}$ $\quad y_2 = \ln|x|$ $\quad y_3 = e^x - 1$ $\quad y_4 = |e^x - 1|$ $\quad y_5 = |\ln x|$.



4. Un comune foglio di carta ha uno spessore di circa 0,072 mm. Se il foglio venisse piegato una prima volta in due, poi il foglio ripiegato piegato di nuovo in due, poi una terza volta e così via, 42 volte in totale, quale sarebbe lo spessore raggiunto (in km)? $0,072$ mm $= 7,2 \cdot 10^{-8}$ km, spessore $= 2^{42} \cdot 7,2 \cdot 10^{-8}$ km $= 2^{43} \cdot 3,6 \cdot 10^{-8}$ km; si ricordi che $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, ne segue: spessore $\approx 10^{43 \cdot \frac{3}{10}} \cdot 3,6 \cdot 10^{-8}$ km $\approx 10^{13} \cdot 3,6 \cdot 10^{-8}$ km $= 3,6 \cdot 10^5$ km. (Con la calcolatrice si ottiene $3,2 \cdot 10^5$ km. Il valore medio della distanza lunare è $3,8 \cdot 10^5$ km.)

5. Si ricordi che il pH di una soluzione acquosa sufficientemente diluita è stato definito da Sørensen come $p\mathrm{H} = -\log_{10}([\mathrm{H_3O^+}]\ \mathrm{dm^3/mol})$, dove $[\mathrm{H_3O^+}]$ indica la concentrazione di $\mathrm{H_3O^+}$.

(a) Calcolare il pH di una soluzione $2,0 \cdot 10^{-3} M$ di HCl ($M = \mathrm{mol/dm^3}$).
$p\mathrm{H} = -\log_{10}(2,0 \cdot 10^{-3}) = -\log_{10}(2,0) - \log_{10} 10^{-3} = 3,0 - \log_{10}(2,0) \approx 3,0 - 0,30 = 2,7$

(b) Il pH di una soluzione è $9,67$, quello di un'altra $8,67$. Calcolare in entrambi i casi la concentrazione di H_3O^+. $[H_3O^+] = 10^{-9,67}M = 10^{0,33} \cdot 10^{-10}M \approx \sqrt[3]{10} \cdot 10^{-10}M$. Con la calcolatrice: $10^{-9,67}M \approx 2,14 \cdot 10^{-10}M$. Analogamente: $10^{-8,67}M \approx 2,14 \cdot 10^{-9}M$, cioè 10 volte la concentrazione di prima.

6. In determinate condizioni, il numero di un certo tipo di batteri triplica ogni due giorni. Se la crescita è esponenziale, qual è l'aumento percentuale dopo 6 ore? E dopo 18 ore? modello di crescita: $N(t) = N_0 3^{\frac{1}{48h}t}$, aumento percentuale dopo 6 ore: $\left(\frac{N_0 3^{\frac{1}{8}}}{N_0} - 1\right) \cdot 100\% \approx 15\%$, dopo 18 ore: $\approx 51\%$

7. Si stima che la popolazione mondiale, attualmente di circa 7 miliardi di individui, aumenti dell'$1,1\%$ all'anno. Supponendo che il tasso di crescita rimanga invariato nel tempo, calcolare entro quanti anni la popolazione raddoppierà, quadruplicherà, decuplicherà. $N_0 = 7 \cdot 10^9$, dopo t anni: $N(t) = N_0(1 + 0,011)^t = N_0 \cdot 1,011^t$; sia T_2 il tempo di raddoppiamento: $N(T_2) = 2N_0 = N_0 \cdot 1,011^{T_2} \Rightarrow 2 = 1,011^{T_2} \Rightarrow T_2 = \log_{1,011}(2) = \frac{\ln 2}{\ln 1,011} \approx 63$ anni; analogamente: $T_4 \approx 127$ anni, $T_{10} \approx 210$ anni

8. Il carbonio ^{14}C ha un tempo di dimezzamento di 5730 anni. Determinate l'età di un reperto organico per il quale la concentrazione di ^{14}C è risultata pari al $12,5\%$ di quella degli analoghi organismi viventi. Modello di decadimento radioattivo: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, dove $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}$; sia t l'età del reperto, allora $\frac{N_0 e^{-\lambda t}}{N_0} = 0,125 \Rightarrow -\lambda t = \ln(0,125) \Rightarrow t = -\frac{\ln(0,125)}{\lambda} = -\frac{\ln(0,125)}{\ln(2)} T_{\frac{1}{2}} = 17190$ anni; altro metodo: $12,5\% = \frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3$, cioè il reperto ha l'età uguale a 3 tempi di dimezzamento: $3 \cdot 5730$ anni $= 17190$ anni.

9. Nelle aree contaminate dall'incidente di Chernobyl e da quello di Fukushima si trovano gli isotopi del cesio ^{137}Cs e ^{134}Cs. Il cesio isotopo ^{137}Cs perde annualmente il $2,3\%$ della sua massa per disintegrazione radioattiva. Il cesio isotopo ^{134}Cs ha un tempo di dimezzamento di 2 anni. Si ricordi che il decadimento radioattivo è esponenziale, cioè il numero $N(t)$ di atomi residui al tempo t può essere valutato in rapporto al numero N_0 di atomi radioattivi iniziali tramite la formula

$$N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t} \, .$$

(a) Si trovi la costante di decadimento λ (unità di misura?) per il ^{137}Cs. $N(1 \text{ anno}) = \mathrm{N_0 e^{-\lambda \cdot 1 \text{ anno}}} = \mathrm{N_0} - 0,023\mathrm{N_0}$, da cui si ricava

$$\lambda = -\frac{\ln(0,977)}{\text{anno}} = 0,023 \text{ anno}^{-1}$$

(b) Qual è la relazione tra il tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ e λ? Si calcoli il tempo di dimezzamento di ^{137}Cs. $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = 30$ anni

(c) Dopo quanti anni la radioattività del ^{137}Cs si riduce a 1%? $0,01N_0 = N_0 e^{-\lambda t}$, da cui $t = \frac{\ln(100)}{\lambda} = 200$ anni.

Altro metodo: dopo 7 tempi di dimezzamento, ossia 210 anni, la radiaoattività si riduce a $1/2^7 = 1/128 \approx 1\%$

(d) Si calcoli la costante di decadimento λ per il ^{134}Cs.
$\lambda = \dfrac{\ln(2)}{T_{1/2}} = 0,35$ anno^{-1}

(e) Nel 1995 è stata fatta un'analisi del rapporto dell'attività del ^{134}Cs sul ^{137}Cs nei funghi. Si è trovato un rapporto di 1 : 40. Il rapporto nella nube radioattiva proveniente da Chernobyl in seguito all'incidente nei primi giorni del maggio 1986 era 1 : 2.

La provenienza dei due isotopi nei funghi è da imputare alla deposizione in seguito all'incidente di Chernobyl? Sia t il tempo necessario per arrivare dal rapporto 1 : 2 al rapporto 1 : 40, e siano λ_1 e λ_2 le costanti di decadimento di ^{134}Cs e ^{137}Cs rispettivamente. Si ottiene

$$\frac{2N_0 e^{-\lambda_2 t}}{N_0 e^{-\lambda_1 t}} = 40\,,$$

quindi $e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} = 20$ e $t = \dfrac{\ln(20)}{\lambda_1 - \lambda_2} = 9$ anni, cioè la provenienza dei due isotopi nei funghi è da imputare alla deposizione in seguito all'incidente di Chernobyl.

(f) Anche l'eliminazione biologica (per via urinaria, fecale e respiratoria) delle sostanze radioattive dall'organismo umano è approssimativamente esponenziale ed è caratterizzato dal tempo di dimezzamento biologico $T_{\mathrm{b}1/2}$. Il cosiddetto tempo di dimezzamento effettivo T_{eff} risulta sia dal decadimento radioattivo sia dall'eliminazione biologica della sostanza radioattiva.

Trovare la relazione fra il tempo di dimezzamento effettivo T_{eff}, il tempo di dimezzamento fisico $T_{1/2}$ e il tempo di dimezzamento biologico $T_{\mathrm{b}1/2}$. (Si noti che $N(t) = N_0 e^{-\lambda_{\mathrm{b}} t} e^{-\lambda t} = N_0 e^{-(\lambda_{\mathrm{b}}+\lambda)t} = N_0 e^{-\lambda_{\mathrm{eff}} t}$, cioè $\lambda_{\mathrm{eff}} = \lambda_{\mathrm{b}} + \lambda$, e usi il risultato di (b).) $N(t) = N_0 e^{\lambda_{\mathrm{b}} t} e^{\lambda t} = N_0 e^{(\lambda_{\mathrm{b}}+\lambda)t} = N_0 e^{\lambda_{\mathrm{eff}} t}$, cioè $\lambda_{\mathrm{eff}} = \lambda_{\mathrm{b}} + \lambda$. Utilizzando (b) ne segue $\dfrac{\ln 2}{T_{\mathrm{eff}}} = \dfrac{\ln 2}{T_{\mathrm{b}1/1}} + \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$. Risulta

$$\frac{1}{T_{\mathrm{eff}}} = \frac{1}{T_{\mathrm{b}1/1}} + \frac{1}{T_{1/2}}\,, \qquad T_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{\frac{1}{T_{\mathrm{b}1/1}} + \frac{1}{T_{1/2}}}\,.$$

(g) Il cesio isotopo ^{134}Cs ha un tempo di dimezzamento fisico di 2 anni e un tempo di dimezzamento biologico di 110 giorni (maschi).

Calcolare il tempo di dimezzamento effettivo del cesio isotopo ^{134}Cs. $\dfrac{1}{T_{\mathrm{eff}}} = (\dfrac{1}{110} + \dfrac{1}{730})$ giorni^{-1}, cioè $T_{\mathrm{eff}} = 96$ giorni.