C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 12. 11. 2015

1. (Abate, seconda edizione, es. 5.50) Scrivi l'espressione esplicita di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica, continua, con un valore massimo di 2 nel punto di massimo $x = 2$ e con n valore minimo -6 nel punto di minimo $x = 3$.
   Una possibilità è $f(x) = 4\cos(\pi(x-2)) - 2$.

2. (Abate, seconda edizione, es. 5.52) L'oscillazione angolare Φ, in radianti, di un pendolo semplice è data da
   $$\Phi(t) = \frac{\pi}{12}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right),$$
   dove $g \approx 9,81\ \mathrm{m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità, ℓ è la lunghezza del pendolo (in metri), e il tempo è misurato in secondi. Supponendo $\ell = 2$ m, determina qual è l'oscillazione angolare massima, quando avviene, e trova il periodo delle oscillazioni.
   L'oscillazione massima è $\frac{\pi}{12}$; avviene agli istanti $\sqrt{\frac{\ell}{g}}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \approx (0,71 + 2,84\,k)\,\mathrm{s}$, con $k \in \mathbb{Z}$; il periodo è $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \approx 2,84\,\mathrm{s}$.

3. Scrivere le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $f(x) = \log_{10} x$ nei punti $P = (1, f(1))$ e $Q = (10, f(10))$. Calcolare il punto di intersezione della retta tangente passante per Q con l'asse delle x.
   $f'(x) = \frac{1}{x}\log_{10} e = \frac{1}{x\ln(10)}$, $f'(1) = \frac{1}{\ln(10)}$, $f'(10) = \frac{1}{10\ln(10)}$, retta tangente passante per P: $y = \frac{1}{\ln(10)}(x-1)$, per Q: $y - 1 = \frac{1}{10\ln(10)}(x-10) \approx 0.04343(x-10)$; punto di intersezione con l'asse x: $(10 - 10\ln(10), 0) \approx (-13.03, 0)$

4. È noto che la distanza s percorsa da un corpo in caduta libera (senza attrito d'aria e con velocità iniziale 0) è $s(t) = \dfrac{g}{2}t^2$, dove t è il tempo e $g \approx 9,81\ \mathrm{ms}^{-2}$ è l'accelerazione di gravità. Supponiamo che un corpo venga lasciato cadere da una quota di 30 m. Calcolate:

   (a) il tempo di caduta, (b) la velocità finale, (c) la velocità media.
   (d) In quale istante la velocità del corpo è uguale alla velocità media?

   (a) $t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = 2.47$ s, (b) $v = s'(t) = gt = 24.3$ m/s,
   (c) $v_m = 30\,\mathrm{m}/2.47\,\mathrm{s} = 12.1$ m/s $(= \frac{1}{2}v)$, (d) $\frac{v_m}{g} = 1.24\,\mathrm{s}$ $(= \frac{1}{2}t)$

5. Calcolare le derivate delle funzioni inverse delle seguenti funzioni e precisare il dominio di tali derivate:
   (a) $y = fx) = x^2,\ x \geq 0\,;$ (b) $y = f(x) = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi.$
   (a) Da $y = x^2,\ x \geq 0$ segue $\frac{dy}{dx} = 2x$, $x = \sqrt{y}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$; scambiando x e y si ottiene $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$; dominio: $x > 0$.
   (b) Da $y = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi$ segue $\frac{dy}{dx} = -\,\mathrm{sen}\,x$, $x = \arccos y$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{\mathrm{sen}\,x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$; scambiando x e y si ottiene $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; dominio: $-1 < x < 1$.

6. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

(a) $v(t) = at + \frac{b}{t} + c$, (b) $y = 3\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x$, (c) $y = \frac{x}{x-3}$,

(a) $a - \frac{b}{t^2}$, (b) $-3\,\mathrm{sen}\,x - 2\,\cos x$, (c) $\frac{-3}{(x-3)^2}$,

(d) $z(t) = (1-t)\cos t$, (e) $f(y) = a\sqrt{y} \cdot \mathrm{sen}\,y$, (f) $Q(\alpha) = \frac{1 - \mathrm{sen}\,\alpha}{1 + \cos\alpha}$,

(d) $-\cos t + t\,\mathrm{sen}\,t$, (e) $a(\frac{\mathrm{sen}\,y}{2\sqrt{y}} + \sqrt{y}\cos y)$, (f) $\frac{\mathrm{sen}\,\alpha - \cos\alpha - 1}{(1+\cos\alpha)^2}$.

7. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

(a) $y = \frac{x+1}{x-2}$, (b) $y = x \cdot \log_{10} x$, (c) $y = x \cdot \cos x$, (d) $f(x) = x \cdot \mathrm{sen}(|x|)$.

(a) $-\frac{3}{(x-2)^2}$, (b) $\log_{10} x + \log_{10} e$, (c) $\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x$, (d) $\mathrm{sen}\,|x| + |x|\cos x$.

Suggerimento per (d): distinguere i 3 casi $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$, e nel caso $x = 0$ studiare il limite del rapporto incrementale $\frac{f(h)-f(0)}{h}$ per $h \to 0$.

$x < 0$: $|x| = -x \Rightarrow \mathrm{sen}(|x|) = \mathrm{sen}(-x) = -\,\mathrm{sen}\,x$, quindi $f(x) = -x \cdot \mathrm{sen}\,x$ e $f'(x) = -\,\mathrm{sen}\,x - x\cos x = \mathrm{sen}(-x) + (-x)\cos x = \mathrm{sen}\,|x| + |x|\cos x$;

$x = 0$: $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\,\mathrm{sen}\,|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \mathrm{sen}\,|h| = 0 = \mathrm{sen}\,|0| + |0|\cos 0$;

$x > 0$: $|x| = x \Rightarrow \mathrm{sen}(|x|) = \mathrm{sen}\,x$, quindi $f(x) = x \cdot \mathrm{sen}\,x$ e $f'(x) = \mathrm{sen}\,x + x\cos x = \mathrm{sen}\,|x| + |x|\cos x$.