C.d.L. in Scienze naturali

Prova di Matematica del 10/02/2016

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Si considerino l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e le funzioni $f : A \to A$. Quante sono? $\boxed{5^5 = 625 \cdot 5 = 3125}$ Quante di esse sono iniettive? $\boxed{5! = 120}$
   Quante sone le f tali che $\{a \in A \mid f(a) = 1\}$ contenga esattamente due elementi? $\boxed{\binom{5}{2} \cdot 4^3 = 5 \cdot 2^7 = 5 \cdot 128 = 640}$

2. Data la funzione $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ $(x \in \mathbf{R})$, calcolare:
   (a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{0 \text{ poiché } \frac{(x^2+1)'}{(e^x)'} = \frac{2x}{e^x}, \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \frac{2}{e^x} \to 0}$
   (applicare la regola di de l'Hospital)
   (b) $f'(x) = \boxed{(x^2 + 1)'e^{-x} + (x^2 + 1)(e^{-x})' = 2xe^{-x} + (x^2 + 1)(-e^{-x}) = -(x - 1)^2 e^{-x}}$
   (c) $f''(x) = \boxed{-2(x - 1)e^{-x} + (x - 1)^2 e^{-x} = (x^2 - 4x + 3)e^{-x} = (x - 1)(x - 3)e^{-x}}$
   (d) i punti stazionari di f e classificarli:
   $\boxed{f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1;\ \text{lì } f'' \text{ cambia il segno da } + \text{ a } -, \text{ flesso discendente}}$
   (e) l'equazione della retta tangente al grafico della f punto $(0, 1)$:
   $\boxed{y - f(0) = f'(0)x \quad \Rightarrow \quad y = 1 - x}$
   (f) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro 0:
   $$\boxed{p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - x + \frac{3}{2}x^2}$$
   (g) i punti di flesso della f:
   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (flesso discendente, si veda (d)) o $x = 3$; f'' cambia in 3 il segno da $-$ a $+$, flesso ascendente
   (h) $$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \boxed{\left[-(x^2 + 1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} xe^{-x}\,dx = -1 + 2e + 2\left[-xe^{-x}\right]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = -1 - 2\left[e^{-x}\right]_{-1}^{0} = 2e - 3}$$
   (integrazione per parti).

3. $\displaystyle\int_1^8 \frac{x^3+3}{3\sqrt[3]{x^2}}\,dx =$ $\boxed{\displaystyle\int_1^8 \left(\frac{1}{3}x^{\frac{7}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}\right)\,dx = \left[\frac{1}{10}x^{\frac{10}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}\right]_1^8 = \frac{2^{10}+60-1-30}{10} = \frac{1024+29}{10} = \frac{1053}{10}}$

4. Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy, e precisare il suo dominio:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{y^2}}{2x^3 y} \\ y(1) = -\sqrt{\ln 2}\,. \end{cases}$$

$\boxed{y(x) = -\sqrt{\ln(2x^2)} \qquad \text{dominio: } x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

Per $x > 0$ e $y < 0$ (ovviamente $x, y \neq 0$ e condizione iniziale), separando le variabili, si ottiene: $\displaystyle\int 2ye^{-y^2}\,dy = \int x^{-3}\,dx \quad \Rightarrow \quad -e^{-y^2} = -\frac{1}{2}x^{-2} + c$, cioè $\frac{1}{e^{y^2}} = \frac{1}{2}x^{-2} - c$, c costante di integrazione; dalla condizione iniziale segue: $\frac{1}{e^{\ln(2)}} = \frac{1}{2} - c$, $c = 0$. Ciò implica $e^{y^2} = 2x^2 \Rightarrow y^2 = \ln(2x^2) \Rightarrow y = -\sqrt{\ln(2x^2)}$. Dominio: $2x^2 \geq 1$ e $x > 0$, $y < 0$, cioè $x^2 \geq \frac{1}{2}$, $x > 0$, $y < 0$ che significa $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & -8 & 9 & -7 \\ -2 & 8 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 25 \\ -1 & 4 \\ 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$,

   (a) calcolare la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 25 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}}$,

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -8 & 9 & -7 & 5 \\ -2 & 8 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2+3R1 \rightarrow \\ R3-2R1 \rightarrow \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R3-2R2 \rightarrow \\ R4-3R2 \rightarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -20 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ R4-R3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R1/(-1) \rightarrow \\ \\ R3/(-5) \rightarrow \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R1-2R3 \rightarrow \\ R2-3R3 \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & -13 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R1+3R2 \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccr|r} 1 & 0 & 0 & -25 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 25 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \\ -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{BA} = \boxed{\text{non è definito}}$,

(c) dire se $\mathbf{A}$ è invertibile e giustificare la risposta:

non è invertibile perché nella sua trasformazione a scala appare uno zero sulla diagonale principale.