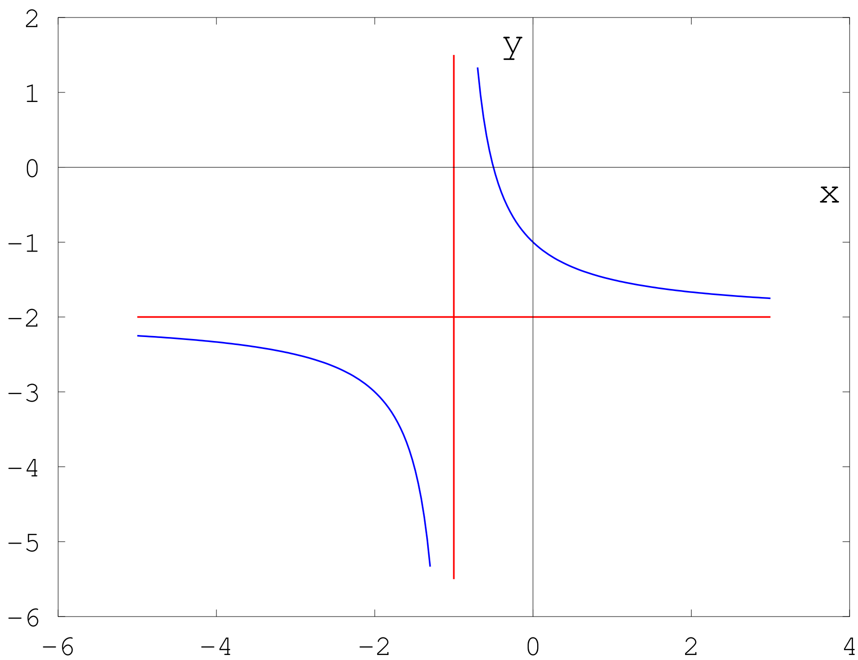
C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 17. 11. 2016

1. Trovare i limiti (se esistono) delle seguenti successioni (a_n) per n tendente all'infinito:
   (a) $a_n = (-1)^n$, non esiste
   (b) $a_n = 2^n$, $+\infty$
   (c) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, 0
   (d) $a_n = a + bn$ $\quad (a, b$ sono costanti, $b \neq 0)$.
   se $b < 0$: $-\infty$, se $b > 0$: $+\infty$

2. Discutere il comportamento limite di $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ per $x \to 2^-$ $(-\infty)$, $x \to 2^+$ $(+\infty)$, $\quad x \to -2^-$ $(-\infty)$, ed $x \to -2^+$ $(+\infty)$.

3. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2$, $x \neq -1$,
   (a) calcolarne i limiti agli estremi del dominio, cioè i limiti per $x \to -1^-$ $(-\infty)$, $x \to -1^+$ $(+\infty)$, $x \to -\infty$ (-2) e $x \to +\infty$ (-2),
   (b) disegnare il grafico della f nell'intervallo $[-5, 3]$.



4. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x + \operatorname{sen} x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
si calcolino (se esistono) i limiti di $f(x)$ per $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$.
$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{|x|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$,
$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{|x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{-x} = \lim_{x \to -\infty} \left(-1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = -1$,
$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + \operatorname{sen} x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 2$,
$\lim_{x \to 0^-} \frac{x + \operatorname{sen} x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x + \operatorname{sen} x}{-x} = \lim_{x \to 0^-} \left(-1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = -2$.

5. Si calcolino (se esistono) i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{4}{1+e^{-3t}} = 4$, (b) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste, (c) $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$,

   (d) $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{6}{2+\ln t} = 0$, (e) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\cdot \operatorname{sen} x = 0$, (f) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

6. Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$ costanti positive ($e = 2,7\ldots$). Trovare i limite delle seguenti funzioni per $t \to +\infty$:

   (a) $f(t) = \dfrac{a}{1+be^{-ct}}$ (funzione logistica di crescita),
   da $\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ segue che $\lim_{t\to+\infty} f(t) = a$

   (b) $f(t) = a\left(1 + \dfrac{b-a}{a-be^{c(b-a)t}}\right)$, dove $a \neq b$ (funzione della cinetica chimica).

   Suggerimento: distinguere i casi $a > b$ e $a < b$.
   se $a > b \Rightarrow b - a < 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} be^{c(b-a)t} = 0$
   $\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} f(t) = a\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) = b$;

   se $a = b$, la f di sopra non è definita;

   se $a < b \Rightarrow b-a > 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} be^{c(b-a)t} = +\infty \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} f(t) = a(1+0) = a$

7. La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è continua nel punto $x_0 = 0$? Motivate la risposta.
   È continua: $\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0 = |0|$, $\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0 = |0|$.

8. Si usi il teorema dei valori intermedi o di Bolzano per stabilire se

   (a) $x^4 - 2x = 1$ ha soluzioni reali nell'intervallo chiuso $[-1, \frac{1}{2}]$;
   Ponendo $f(x) := x^4 - 2x - 1$ si ha $f(-1) = 2 > 0$ e $f(\frac{1}{2}) = -\frac{31}{16} < 0$, quindi c'è almeno una soluzione reale (e per la monotonia della f esattamente una soluzione) dell'equazione di sopra in $[-1, \frac{1}{2}]$.

   (b) $\cos x = x$ ha soluzioni reali nell'intervallo chiuso $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   Ponendo $f(x) := x - \cos x$ si ha $f(0) = -1 < 0$ e $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$ e si conclude come in (a).

9. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di Weierstrass per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + x^2, & 1 \le x \le \frac{3}{2} \\ \operatorname{sen}(\pi x), & \frac{3}{2} < x \le 2\,. \end{cases}$$

   Determinare anche il minimo e il massimo della funzione f.
   Affinché la funzione abbia un massimo e un minimo su un intervallo chiuso è sufficiente per il teorema di Weierstrass che questa sia continua su quell'intervallo. Bisogna quindi trovare per quali valori di α la funzione è continua su $[1, 2]$. Considerando singolarmente le due parti della funzione si vede che queste sono funzioni continue qualsiasi sia il valore di α, affinché lo sia tutta $f(x)$ deve essere $\lim_{x\to(\frac{3}{2})^-} f(x) = \lim_{x\to(\frac{3}{2})^+} f(x)$, cioè $\lim_{x\to(\frac{3}{2})^-} (\alpha + x^2) = \alpha + \frac{9}{4} = \lim_{x\to(\frac{3}{2})^+} \operatorname{sen}(\pi x) = -1$. Ne segue $\alpha = -\frac{13}{4}$. Per determinare il minimo e il massimo osserviamo che la f è monotona crescente. Perciò il minimo è $f(1) = -\frac{9}{4}$ e il massimo è $f(2) = 0$.