C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 23. 11. 2016

1. Scrivere le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $f(x) = \log_{10} x$ nei punti $P = (1, f(1))$ e $Q = (10, f(10))$. Calcolare il punto di intersezione della retta tangente passante per Q con l'asse delle x.

   $f'(x) = \frac{1}{x}\log_{10} e = \frac{1}{x\ln(10)}$, $f'(1) = \frac{1}{\ln(10)}$, $f'(10) = \frac{1}{10\ln(10)}$, retta tangente passante per P: $y = \frac{1}{\ln(10)}(x-1)$, per Q: $y - 1 = \frac{1}{10\ln(10)}(x-10) \approx 0.04343(x-10)$; punto di intersezione con l'asse x: $(10 - 10\ln(10), 0) \approx (-13.03, 0)$

2. È noto che la distanza s percorsa da un corpo in caduta libera (senza attrito d'aria e con velocità iniziale 0) è $s(t) = \dfrac{g}{2}t^2$, dove t è il tempo e $g \approx 9,81\ \mathrm{ms}^{-2}$ è l'accelerazione di gravità. Supponiamo che un corpo venga lasciato cadere da una quota di 30 m. Calcolate:

   (a) il tempo di caduta, (b) la velocità finale, (c) la velocità media.

   (d) In quale istante la velocità del corpo è uguale alla velocità media?

   (a) $t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = 2.47$ s, (b) $v = s'(t) = gt = 24.3$ m/s,
   (c) $v_m = 30\,\mathrm{m}/2.47\,\mathrm{s} = 12.1$ m/s $(= \frac{1}{2}v)$, (d) $\frac{v_m}{g} = 1.24\,\mathrm{s}$ $(= \frac{1}{2}t)$

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

   (a) $v(t) = at + \dfrac{b}{t} + c$, (b) $y = 3\cos x - 2\ \mathrm{sen}\, x$, (c) $y = \dfrac{x}{x-3}$,

   (a) $a - \dfrac{b}{t^2}$, (b) $-3\,\mathrm{sen}\, x - 2\cos x$, (c) $\dfrac{-3}{(x-3)^2}$,

   (d) $z(t) = (1-t)\cos t$, (e) $f(y) = a\sqrt{y}\cdot \mathrm{sen}\, y$, (f) $Q(\alpha) = \dfrac{1 - \mathrm{sen}\,\alpha}{1 + \cos\alpha}$,

   (d) $-\cos t + t\,\mathrm{sen}\, t$, (e) $a(\frac{\mathrm{sen}\, y}{2\sqrt{y}} + \sqrt{y}\cos y)$, (f) $\dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha - \cos\alpha - 1}{(1+\cos\alpha)^2}$.

4. Calcolare le derivate delle funzioni inverse delle seguenti funzioni e precisare il dominio di tali derivate:

   (a) $y = fx) = x^2,\ x \le 0$; (b) $y = f(x) = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$.

   (a) Da $y = x^2$, $x \le 0$ segue $\frac{dy}{dx} = 2x$, $|x| = -x = \sqrt{y}$, $-\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$; scambiando x e y si ottiene $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$; dominio: $x > 0$.

   (b) Da $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$ segue $\frac{dy}{dx} = -\mathrm{sen}\, x$, $x = \arccos y$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{\mathrm{sen}\, x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$; scambiando x e y si ottiene $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; dominio: $-1 < x < 1$.

5. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

   (a) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$, (b) $y = x\cdot\log_{10} x$, (c) $y = x\cdot\cos x$, (d) $f(x) = x\cdot\mathrm{sen}(|x|)$.

   (a) $-\dfrac{3}{(x-2)^2}$, (b) $\log_{10} x + \log_{10} e$, (c) $\cos x - x\,\mathrm{sen}\, x$, (d) $\mathrm{sen}\,|x| + |x|\cos x$.

   Suggerimento per (d): distinguere i 3 casi $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$, e nel caso $x = 0$ studiare il limite del rapporto incrementale $\frac{f(h)-f(0)}{h}$ per $h \to 0$.

   $x < 0$: $|x| = -x \Rightarrow \mathrm{sen}(|x|) = \mathrm{sen}(-x) = -\mathrm{sen}\, x$, quindi $f(x) = -x\cdot\mathrm{sen}\, x$ e $f'(x) = -\mathrm{sen}\, x - x\cos x = \mathrm{sen}(-x) + (-x)\cos x = \mathrm{sen}\,|x| + |x|\cos x$;

$x = 0$: $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \operatorname{sen}|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}|h| = 0 = \operatorname{sen}|0| + |0| \cos 0$;

$x > 0$: $|x| = x \Rightarrow \operatorname{sen}(|x|) = \operatorname{sen} x$, quindi $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$ e $f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x = \operatorname{sen}|x| + |x| \cos x$.

6. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

   (a) $h(\phi) = \dfrac{\operatorname{sen} 2\phi}{\cos 3\phi}$, (b) $f(x) = \cos(e^{3x})$, (c) $f(x) = \cos(4x^2 - x + 1)$,
   (a) $\frac{2\cos 2\phi \cos 3\phi + 3 \operatorname{sen} 2\phi \operatorname{sen} 3\phi}{\cos^2 3\phi}$, (b) $-3e^{3x} \operatorname{sen}(e^{3x})$, (c) $(-8x+1)\operatorname{sen}(4x^2 - x + 1)$.
   (d) $U(t) = qt^{-2}$, (e) $R(s) = \dfrac{1}{a - bs}$, (f) $R(s) = \dfrac{1}{\log_{10} s}$, (g) $v(t) = (3t-1)^{-2}$
   (d) $-2qt^{-3}$, (e) $\dfrac{b}{(a-bs)^2}$, (f) $-\dfrac{\log_{10} e}{s(\log_{10} s)^2}$, (g) $-6(3t-1)^3$.

7. Le misure della lunghezza e della larghezza di un poster rettangolare sono 160 cm e 90 cm, entrambe con l' errore del 2%. Qual è l'errore percentuale (errore relativo) sull'area calcolata? Calcola la misura dell'area con l'errore assoluto.
   L'errore relativo di un prodotto è la somma degli errori relativi dei singoli fattori. Quindi l'errore percentuale sull'area calcolata è del 4%. Ne segue che l'area è pari a $(1,44 \pm 0,06)\mathrm{m}^2$.
   Gli stessi risultati si ottengono calcolando valore min $= (160 + 0,02 \cdot 160) \cdot (90 + 0,02 \cdot 90)\mathrm{cm}^2 = 1,50\mathrm{m}^2$ e valore min $= (160 - 0,02 \cdot 160) \cdot (90 - 0,02 \cdot 90)\mathrm{cm}^2 = 1,38\mathrm{m}^2$.
   Nota: Dalla precisione indicata attraverso gli errori percentuali segue che si hanno 3 cifre significative.

8. Misurando il volume di un cilindro metallico si trova $V = (10,0 \pm 0,1)$ cm^3; la massa del cilindro è $m = (27,1 \pm 0,1)$ g. Calcola la densità e l'errore percentuale sulla densità.

   N.B.: In analogia alla formula ottenuta a lezione per l'errore relativo di un prodotto, si dimostra che l'errore relativo nel calcolo di un quoziente è minore o uguale alla somma degli errori relativi del numeratore e del denominatore.

   valore max $= 27,2 : 9,9\,\mathrm{g/cm^3} = 2,75\,\mathrm{g/cm^3}$, valore min $= 27,0 : 10,1\,\mathrm{g/cm^3} = 2,67\,\mathrm{g/cm^3}$, ne segue che la densità è uguale a $(2,71 \pm 0,04)$ g/cm^3 e l'errore sulla densità è del $0,04/2,71 \cdot 100\% = 1,5\%$.
   2º metodo:
   L'errore relativo di un quoziente è la somma degli errori relativi del numeratore e del denominatore: $(0,1/27,1 + 0,1/10,0) \cdot 100\% = 1,4\%$. Ne segue che la densità è $(2,71 \pm 2,71 \cdot 0,014)\mathrm{g/cm^3} = (2,71 \pm 0,04)\mathrm{g/cm^3}$.

9. Mediante il differenziale calcolare approssimativamente la quantità $\sqrt{10001}$.
   $y = f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 10000, f(x_0) = 100, \Delta x = 1, \Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200} = 0,005, \sqrt{10001} = 100 + \Delta y \approx 100 + dy = 100,005$.

10. Usare il differenziale della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ per calcolare approssimativamente $1,002^{-1}$ e $0,997^{-1}$ e confrontare i risultati con i valori precisi.
    $df(x, \Delta x) = -\frac{1}{x^2}\Delta x$, $df(1, \Delta x) = -\Delta x$, quindi $1,002^{-1} \approx 1 - df(1; 0,002) = 1 - 0,002 = 0,998$; analogamente $0,997^{-1} \approx 1 + 0,003 = 1,003$.
    I valori precisi sono $0,9980\ldots$ e $1,0030\ldots$ rispettivamente.