C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 12/12/2016

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Sia dato l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

   Quanti sono i sottoinsiemi di A formati da 7 elementi? $\boxed{\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120}$

   Quanti sono i sottoinsiemi di A (compresi l'insieme vuoto ed A stesso)? $\boxed{2^{10} = 1024}$

   Quante sono le coppie ordinate (a, b) con $a, b \in A$ e $a \leq b$? $\boxed{\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55}$

2. Un gioco consiste nel lanciare 4 monete non truccate. Qual è la probabilità di ottenere almeno 3 teste? $\boxed{P(0 \text{ croci}) + P(1 \text{ croce}) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16}}$

3. Il cesio isotopo ^{137}Cs è radioattivo e ha un tempo di dimezzamento di 30 anni.

   (a) Siano presenti inizialmente N_0 atomi di ^{137}Cs. Determinare la costante di decadimento λ (in anno^{-1}) in modo tale che il numero $N(t)$ degli atomi presenti dopo il tempo t sia approssimativamente $N = N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

   $$\boxed{N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} N_0 \Rightarrow e^{\lambda T_{1/2}} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{30} \text{anno}^{-1} \approx 0,0231 \,\text{anno}^{-1}}$$

   (b) Di quale percentuale si riduce una data quantità di ^{137}Cs annualmente?

   $$\boxed{\frac{N_0 e^{-\lambda(t+1\,\text{anno})}}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda\,\text{anno}} \Rightarrow 1 - e^{-\lambda\,\text{anno}} \approx \lambda\,\text{anno} \cdot 100\,\% \approx 2\,\%.}$$

   (c) Calcolare il tempo necessario affinché una data quantità di ^{137}Cs si riduca al $12,5\%$ della quantità iniziale.

   $$\boxed{12,5\% = (\tfrac{1}{2})^3 \Rightarrow \text{tempo necessario} = 3T_{1/2} = 90 \text{ anni.}}$$

4. Si determinino i valori reali di x per cui: $\log_2(x) + \log_2(x + 2) = 3$.

   $$\boxed{\log_2(x) + \log_2(x+2) = \log_2(x^2 + 2x) = 3 \Rightarrow x^2 + 2x = 2^3, x > 0 \Rightarrow x = 2}$$

5. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + 1,\ \ x \neq -1$, calcolare

   (a) l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0;2)$;

   $$y - 2 = f'(0) \cdot x = \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)_{x=0} \cdot x = -x \Rightarrow y = -x + 2$$

   (b) approssimativamente $f(-0,002)$ usando il differenziale di f.

   $$df(0;-0,002) = f'(0) \cdot \Delta x = 0,002 \approx f(-0,002) - f(0) \Rightarrow f(-0,002) \approx 2,002$$

6. In un sistema di riferimento cartesiano nel piano il punto P abbia le coordinate $(-1;-1)$. Sia Q il punto che si ottiene ruotando P in senso orario attorno l'origine O di un angolo di 105^o. Calcolare le coordinate polari (dove $\theta \in]-\pi, \pi]$) dei punti P e Q le coordinate cartesiane del punto Q.

   $$\theta_P = -\tfrac{3}{4}\pi, \quad \rho_P = \sqrt{2}, \quad \theta_Q = \tfrac{2}{3}\pi, \quad \rho_Q = \sqrt{2}, \quad x_Q = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad y_Q = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}$$

7. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{\ln(\frac{x}{2})},\quad x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ x \neq 2,$

   (a) determinare $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = $ $+\infty$, poiché $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x)'}{(\ln(\frac{x}{2}))'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty$

   (applicare la regola di de l'Hospital)

   (b) calcolare $f'(x) = \dfrac{\ln(\frac{x}{2}) - 1}{\left(\ln(\frac{x}{2})\right)^2}$

   (c) calcolare $f''(x) = \dfrac{\left(\ln(\frac{x}{2}) - 1\right)' \left(\ln(\frac{x}{2})\right)^2 - \left(\ln(\frac{x}{2}) - 1\right)\left((\ln(\frac{x}{2}))^2\right)'}{\left(\ln(\frac{x}{2})\right)^4} = \dfrac{2 - \ln(\frac{x}{2})}{x\left(\ln(\frac{x}{2})\right)^3}$

   (d) trovare e classificare il punto stazionario x_0 di f:

   $x_0 = 2e$, si tratta di un punto di minimo relativo ($f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2e$).

   (e) trovare il punto di flesso di f:

   $f(x)$ è convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x > 2$ e $2 - \ln(\frac{x}{2}) \geq 0 \Leftrightarrow 2 < x \leq 2e^2$, cioè il punto $(2e^2, e^2)$ è un punto di flesso discendente per la funzione.

C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 12/12/2016

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Sia dato l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

   Quanti sono i sottoinsiemi di A formati da 5 elementi? $\boxed{\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56}$

   Quanti sono i sottoinsiemi di A (compresi l'insieme vuoto ed A stesso)? $\boxed{2^8 = 256}$

   Quante sono le coppie ordinate (a, b) con $a, b \in A$ e $a \leq b$? $\boxed{\sum_{k=1}^{8} k = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36}$

2. Un gioco consiste nel lanciare 6 monete non truccate. Qual è la probabilità di ottenere almeno 5 teste? $\boxed{P(0 \text{ croci}) + P(1 \text{ croce}) = \frac{1}{64} + \frac{6}{64} = \frac{7}{64}}$

3. Il iodio isotopo $^{123}\mathrm{I}$ è radioattivo e ha un tempo di dimezzamento di 13 ore.

   (a) Siano presenti inizialmente N_0 atomi di $^{123}\mathrm{I}$. Determinare la costante di decadimento λ (in h^{-1}) in modo tale che il numero $N(t)$ degli atomi presenti dopo il tempo t sia approssimativamente $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

   $$\boxed{N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} N_0 \Rightarrow e^{\lambda T_{1/2}} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{13}\,\mathrm{h}^{-1} \approx 0,0533\,\mathrm{h}^{-1}}$$

   (b) Di quale percentuale si riduce una data quantità di $^{123}\mathrm{I}$ ogni ora?

   $$\boxed{\frac{N_0 e^{-\lambda(t+1\,\mathrm{h})}}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda\,\mathrm{h}} \Rightarrow 1 - e^{-\lambda\,\mathrm{h}} \approx \lambda \cdot \mathrm{h} \cdot 100\,\% \approx 5\,\%.}$$

   (c) Calcolare il tempo necessario affinché una data quantità di $^{123}\mathrm{I}$ si riduca al $12,5\%$ della quantità iniziale.

   $$\boxed{12,5\% = (\tfrac{1}{2})^3 \Rightarrow \text{tempo necessario} = 3T_{1/2} = 39 \text{ h.}}$$

4. Si determinino i valori reali di x per cui: $\log_2(x) + \log_2(x - 4) = 5$.

   $$\boxed{\log_2(x) + \log_2(x-4) = \log_2(x^2 - 4x) = 5 \Rightarrow x^2 - 4x = 2^5, x > 4 \Rightarrow x = 8}$$

5. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + 2,\ \ x \neq -1$, calcolare

(a) l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0;3)$;

$$y - 3 = f'(0) \cdot x = \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)_{x=0} \cdot x = -x \Rightarrow y = -x + 3$$

(b) approssimativamente $f(0,003)$ usando il differenziale di f.

$$df(0;0,003) = f'(0) \cdot \Delta x = -0,003 \approx f(0,003) - f(0) \Rightarrow f(0,003) \approx 2,997$$

6. In un sistema di riferimento cartesiano nel piano il punto P abbia le coordinate $(-1;\sqrt{3})$. Sia Q il punto che si ottiene ruotando P in senso antiorario attorno l'origine O di un angolo di 105°. Calcolare le coordinate polari (dove $\theta \in]-\pi,\pi]$) dei punti P e Q le coordinate cartesiane del punto Q.

$$\theta_P = \tfrac{2}{3}\pi, \quad \rho_P = 2, \quad \theta_Q = -\tfrac{3}{4}\pi, \quad \rho_Q = 2, \quad x_Q = -\sqrt{2}, \quad y_Q = -\sqrt{2}$$

7. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{\ln(\frac{1}{x})},\quad x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ x \neq 1,$

(a) determinare $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ $-\infty$, poiché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(-\ln x)'} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\frac{1}{x}} = -\infty$

(applicare la regola di de l'Hospital)

(b) calcolare $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{(\ln x)^2}$

(c) calcolare $f''(x) = \dfrac{(1-\ln x)'(\ln x)^2 - (1-\ln x)\left((\ln x)^2\right)'}{(\ln x)^4} = \dfrac{\ln(x) - 2}{x(\ln x)^3}$

(d) trovare e classificare il punto stazionario x_0 di f:

$x_0 = e$, si tratta di un punto di massimo relativo ($f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$).

(e) trovare il punto di flesso di f:

$f(x)$ è convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ o $\ln(x) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ o $e^2 \leq x$, cioè il punto $(e^2, -\frac{1}{2}e^2)$ è un punto di flesso ascendente per la funzione.

C.d.L. in Scienze naturali

Prova di Matematica del 12/12/2016

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Sia dato l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

   Quanti sono i sottoinsiemi di A formati da 6 elementi? $\boxed{\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84}$

   Quanti sono i sottoinsiemi di A (compresi l'insieme vuoto ed A stesso)? $\boxed{2^9 = 512}$

   Quante sono le coppie ordinate (a, b) con $a, b \in A$ e $a \leq b$? $\boxed{\sum_{k=1}^{9} k = \frac{9\cdot 10}{2} = 45}$

2. Un gioco consiste nel lanciare 5 monete non truccate. Qual è la probabilità di ottenere almeno 4 teste? $\boxed{P(0 \text{ croci}) + P(1 \text{ croce}) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{3}{16}}$

3. Il iodio isotopo $^{131}\mathrm{I}$ è radioattivo e ha un tempo di dimezzamento di 8 giorni.

   (a) Siano presenti inizialmente N_0 atomi di $^{131}\mathrm{I}$. Determinare la costante di decadimento λ (in giorno$^{-1} = \mathrm{d}^{-1}$) in modo tale che il numero $N(t)$ degli atomi presenti dopo il tempo t sia approssimativamente $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

   $$\boxed{N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} N_0 \Rightarrow e^{\lambda T_{1/2}} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{8}\,\mathrm{d}^{-1} \approx 0{,}0866\,\mathrm{d}^{-1}}$$

   (b) Di quale percentuale si riduce una data quantità di $^{131}\mathrm{I}$ ogni giorno?

   $$\boxed{\frac{N_0 e^{-\lambda(t+1\,\mathrm{d})}}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda\,\mathrm{d}} \Rightarrow 1 - e^{-\lambda\,\mathrm{d}} \approx \lambda\cdot \mathrm{d}\cdot 100\,\% \approx 8\,\%.}$$

   (c) Calcolare il tempo necessario affinché una data quantità di $^{131}\mathrm{I}$ si riduca al $12,5\%$ della quantità iniziale.

   $$\boxed{12,5\% = (\tfrac{1}{2})^3 \Rightarrow \text{tempo necessario} = 3T_{1/2} = 24 \text{ giorni.}}$$

4. Si determinino i valori reali di x per cui: $\log_2(x) + \log_2(x - 14) = 5$.

   $$\boxed{\log_2(x) + \log_2(x - 14) = \log_2(x^2 - 14x) = 5 \Rightarrow x^2 - 14x = 2^5, x > 14 \Rightarrow x = 16}$$

5. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + 3, \quad x \neq -1$, calcolare

   (a) l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0;4)$;

   $$y - 4 = f'(0) \cdot x = \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)_{x=0} \cdot x = -x \Rightarrow y = -x + 4$$

   (b) approssimativamente $f(0,002)$ usando il differenziale di f.

   $$df(0; 0,002) = f'(0) \cdot \Delta x = -0,002 \approx f(0,002) - f(0) \Rightarrow f(0,002) \approx 3,998$$

6. In un sistema di riferimento cartesiano nel piano il punto P abbia le coordinate $(-2,2)$. Sia Q il punto che si ottiene ruotando P in senso orario attorno l'origine O di un angolo di 105°. Calcolare le coordinate polari (dove $\theta \in]-\pi,\pi]$) dei punti P e Q le coordinate cartesiane del punto Q.

   $$\theta_P = \tfrac{3}{4}\pi, \quad \rho_P = 2\sqrt{2}, \quad \theta_Q = \tfrac{1}{6}\pi, \quad \rho_Q = 2\sqrt{2}, \quad x_Q = \sqrt{6}, \quad y_Q = \sqrt{2}$$

7. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{\ln(-x)}, \quad x \in \mathbb{R},\ x < 0,\ x \neq -1$,

   (a) determinare $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ $-\infty$, poiché $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(x)'}{(\ln(-x))'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = -\infty$

   (applicare la regola di de l'Hospital)

   (b) calcolare $f'(x) = \dfrac{\ln(-x)-1}{(\ln(-x))^2}$

   (c) calcolare $f''(x) = \dfrac{(\ln(-x)-1)'\,(\ln(-x))^2 - (\ln(-x)-1)\,((\ln(-x))^2)'}{(\ln(-x))^4} = \dfrac{2-\ln(-x)}{x\,(\ln(-x))^3}$

   (d) trovare e classificare il punto stazionario x_0 di f:

   $x_0 = -e$, si tratta di un punto di massimo relativo ($f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -e$).

   (e) trovare il punto di flesso di f:

   $f(x)$ è convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ o $2 - \ln(-x) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ o $x \leq e^2$, cioè il punto $(-e^2, -\frac{1}{2}e^2)$ è un punto di flesso discendente per la funzione.