C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 15. 12. 2016

1. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$

prendendo come punto iniziale $x_0 = 2$.

N.B.: Le derivate di ordine 5 e maggiore della f sono identicamente zero, cioè il polinomio di Taylor di grado 4 è già la serie di Taylor.

Le derivate sono $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 7$, $f''(x) = 12x^2 - 12x + 4$, $f'''(x) = 24x - 12$, $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(k)}(x) = 0$ per $k \geq 5$, quindi $f(2) = -5$, $f'(2) = 9$, $f''(2) = 28$, $f'''(2) = 36$, $f^{(4)}(2) = 24$, $f^{(k)}(2) = 0$ per $k \geq 5$. Ne segue che

$$f(x) = p_4(x) = -5 + 9(x-2) + 14(x-2)^2 + 6(x-2)^3 + (x-2)^4.$$

2. Calcolare gli integrali:

(a) $\displaystyle\int_2^3 x^5\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} x^{-5}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^9 4\sqrt{x}\,dx$, (e) $\displaystyle\int_0^2 \frac{6x^2 + 4x + 2}{\sqrt{x}}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_1^e -\frac{1}{x}\,dx$.

(a) $\displaystyle\left[\frac{1}{6}x^6\right]_2^3 = \frac{665}{6}$, (b) $\displaystyle\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{15}{64}$, (c) $[-\cos x + \operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$,

(d) $\displaystyle\left[\frac{8}{3}x\sqrt{x}\right]_0^9 = 72$, (f) $[-\ln|x|]_1^e = -1$,

(e) $\displaystyle\int_0^2 (6x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}})\,dx = \left[\frac{12}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}\right]_0^2 = \frac{284}{15}\sqrt{2}.$

3. Calcolare gli integrali indefiniti con il metodo di integrazione per parti:

(a) $\displaystyle\int x \log_{10} x\,dx$, (b) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$, (c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$, (d) $\displaystyle\int x\,2^x\,dx$.

(a) $\displaystyle\frac{1}{2}x^2\log_{10} x - \frac{1}{2}\int x\log_{10} e\,dx = \frac{1}{2}x^2\log_{10} x - \frac{1}{4}x^2\log_{10} e + c$,

(b) $\displaystyle x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + c$,

(c) $\displaystyle\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{2}{3}\int\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + c = \frac{2}{9}x\sqrt{x}(3\ln x - 2) + c$,

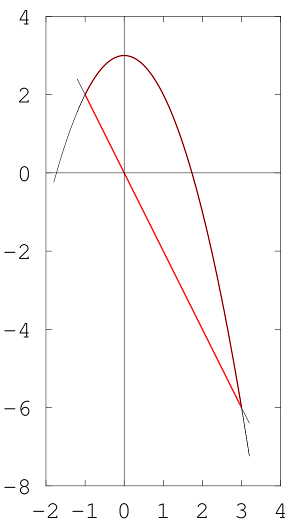
(d) $\displaystyle\frac{x2^x}{\ln 2} - \int\frac{2^x}{\ln 2}\,dx = \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + c = \frac{2^x(x\ln 2 - 1)}{(\ln 2)^2} + c.$

4. Calcolare gli integrali: (a) $\int_{-e}^{-1} x^{-1}\,dx$, (b) $\int_2^3 (3x-5)^{-2}\,dx$, (c) $\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$, (d) $\int_1^2 xe^{-x}\,dx$, (e) $\int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt{1-5x}}\,dx$, (f) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\,\mathrm{sen}(3x)\,dx$, (g) $\int_0^\pi \frac{\mathrm{sen}\,x}{3+\cos x}\,dx$ (sost. $u=3+\cos x$), (h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)^4\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ (sost. $u=1-\cos x$), (i) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ (sost. $u=\sqrt{x+1}$), (k) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ (per parti).

(a) $[\ln|x|]_{-e}^{-1} = \ln 1 - \ln e = -1$, (b) $-\frac{1}{3}[(3x-5)^{-1}]_2^3 = -\frac{1}{3}(\frac{1}{4}-1) = \frac{1}{4}$, (c) $\int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}\,dx = -2[x^{-\frac{1}{2}}]_1^4 = -2\left(\frac{1}{2}-1\right) = 1$, (d) per parti: $[-xe^{-x}]_1^2 + \int_1^2 e^{-x}\,dx = -\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e}-[e^{-x}]_1^2 = \frac{2}{e}-\frac{3}{e^2} = \frac{2e-3}{e^2}$, (e) $-\frac{2}{5}\left[\sqrt{1-5x}\right]_{-3}^0 = -\frac{2}{5}(1-4) = \frac{6}{5}$, (f) per parti: $-\frac{1}{3}[x\cos(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\,dx = 0 + \frac{1}{9}[\mathrm{sen}(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{9}$, (g) $-\int_0^\pi \frac{-\mathrm{sen}\,x}{3+\cos x}\,dx = -\left[\ln|3+\cos x|\right]_0^\pi = -(\ln 2 - \ln 4) = \ln 4 - \ln 2 = \ln\frac{4}{2} = \ln 2$, (h) $du = \mathrm{sen}\,x\,dx$; $\int_0^1 u^4\,du = \frac{1}{5}\left[u^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}$, (i) $du = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$; $2\int_1^{\sqrt{3}} (u^2-1)\,du = 2\left[\frac{1}{3}u^3 - u\right]_1^{\sqrt{3}} = 2\left[(\sqrt{3}-\sqrt{3}) - \left(\frac{1}{3}-1\right)\right] = \frac{4}{3}$,
(k) $2\left[\sqrt{x}\ln x\right]_1^e - 2\int_1^e \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx = 2\sqrt{e} - 2\int_1^e x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{e} - 4\left[\sqrt{x}\right]_1^e = 4 - 2\sqrt{e}$.

5. Calcolare l'area della regione limitata di piano compresa tra il grafico di $y = \mathrm{sen}(\frac{x}{3})$ e l'asse x, al variare di x nell'intervallo $[0,\pi]$.
$$\int_0^\pi \mathrm{sen}\left(\frac{x}{3}\right)\,dx = -3\left[\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^\pi = -3\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{3}{2}$$

6. Si trovi l'area limitata dalla parabola $y = 3 - x^2$ e dalla retta $y = -2x$ (disegno!).



$$\int_{-1}^3 \left[(3-x^2) - (-2x)\right]\,dx = \frac{32}{3}$$

7. Dire quale dei integrali è più grande e calcolarli: $\left|\int_{-4}^2 x\,dx\right|$, $\int_{-4}^2 |x|\,dx$.

$$\left|\int_{-4}^2 x\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-4}^2\right| = 6 < \int_{-4}^2 |x|\,dx = \int_{-4}^0 (-x)\,dx + \int_0^2 x\,dx = 8+2$$