C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 22. 12. 2016

1. Si consideri la reazione $2\,N_2O_5 \longrightarrow 4NO_2 + O_2$. La concentrazione $x := [N_2O_5]$ dipende dal tempo t, cioè $x = x(t)$, ed è soluzione del seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0\,, \end{cases}$$
dove $k = 8{,}05 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$.
   (a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy (in modo esplicito).
   (b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$.
   (c) Dopo quante ore la concentrazione di N_2O_5 si riduce al 50% della concentrazione iniziale x_0?

   (a) $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = -k\int_0^t dt \quad\Rightarrow\quad \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -kt \quad\Rightarrow\quad x = x(t) = x_0e^{-kt}$

   (b) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$

   (c) $\displaystyle\frac{1}{2}x_0 = x_0e^{-kt} \quad\Rightarrow\quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 = -kt \quad\Rightarrow$
   $$t = \frac{\ln 2}{k} = \frac{10^5 \cdot \ln 2}{8{,}05\cdot 60^2}\text{ h} = 2{,}39\text{ h} = 2\text{ h }24\text{ min}$$

2. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale
$$\frac{dy}{dx} = y(y-3)$$
con la condizione iniziale
   (a) $y(0) = \frac{3}{2}$, (b) $y(0) = 3$, (c) $y(0) = 6$.

   Suggerimento: Per l'integrazione si noti che $\frac{1}{y(y-3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y}\right)$.

   Le funzioni costante $y = 0$ e $y = 3$ sono soluzioni dell'equazione differenziale, quindi $y = 3$ è soluzione del problema di Cauchy (b). Sia adesso $y \neq 0$ e $y \neq 3$. Allora $\int \frac{dy}{y(y-3)} = \int dx$ e con $\frac{1}{y(y-3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y}\right)$ si ottiene $\ln|\frac{y-3}{y}| = 3x + c$ (c è costante di integrazione), quindi $|\frac{y-3}{y}| = e^{3x+c} = e^ce^{3x}$. Nel caso (a) $|\frac{y-3}{y}| = -\frac{y-3}{y} = e^{3x+c}$ e $-\frac{\frac{3}{2}-3}{\frac{3}{2}} = 1 = e^c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow 3 - y = ye^{3x}$ e la soluzione del problema di Cauchy è $y = \frac{3}{1+e^{3x}}$, $x \in \mathbb{R}$. Nel caso (c) $|\frac{y-3}{y}| = \frac{y-3}{y} = e^{3x+c}$ e $\frac{6-3}{6} = \frac{1}{2} = e^c \Rightarrow \frac{y-3}{y} = \frac{1}{2}e^{3x} \Rightarrow 2(y-3) = ye^{3x}$ e la soluzione del problema di Cauchy è $y = \frac{6}{2-e^{3x}}$, $x < \frac{\ln 2}{3}$.

3. Nella reazione bimolecolare $2\,NO_2 \longrightarrow N_2O_4$ la concentrazione $C = C(t) = [NO_2]$ soddisfa l'equazione differenziale
$$\frac{dC}{dt} = -kC^2$$
dove k è una costante positiva. Sia $C(0) = C_0$.

(a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale.
$\int_{C_0}^{C} \frac{dC}{C^2} = -k \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} = kt \Rightarrow C = C(t) = \frac{1}{\frac{1}{C_0}+kt},\ t \geq 0$

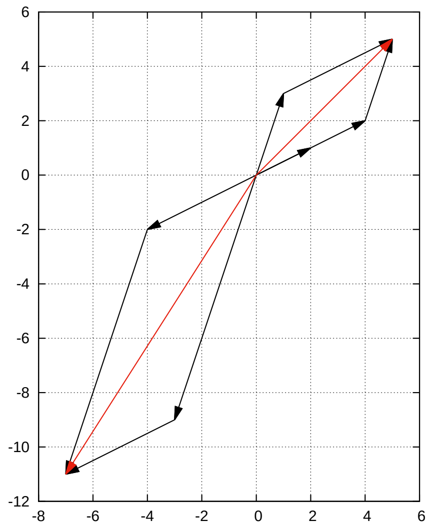
(b) Trovare il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$. $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$

4. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^y \ln x \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

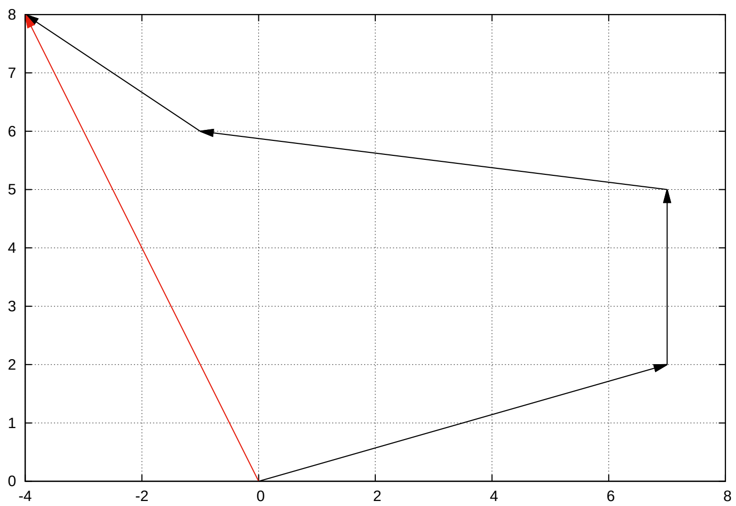
$\int_0^y e^{-y}\, dy = \int_1^x \ln x\, dx \Rightarrow [-e^{-y}]_0^y = [x \ln x]_1^x - \int_1^x x\frac{1}{x}\, dx \Rightarrow 1 - e^{-y} = x\ln x - x + 1 \Rightarrow e^{-x} = x(1-\ln x) \Rightarrow y = -\ln x - \ln(1-\ln x),\ 0 < x < e$

5. Si considerino i vettori $\vec{u} = (2,1)$ e $\vec{v} = (1,3)$. Calcolare e disegnare i vettori $2\vec{u} + \vec{v}$ e $-2\vec{u} - 3\vec{v}$.
$2\vec{u} + \vec{v} = (4,2) + (1,3) = (5,5)$, $-2\vec{u} - 3\vec{v} = (-4,-2) - (3,9) = (-7,-11)$.



6. Trovare la somma di $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, geometricamente usando un poligono vettoriale. Verificare il risultato con una somma algebrica.

somma $= \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$



7. Dati i vettori $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-3, 2)$, calcolare $\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ e il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
$\vec{a} - \vec{b} = (5, -1)$, $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = \sqrt{13}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{26}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 = -4$.

8. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,
valutare (se ciò è possibile) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ non è definito,
$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $3\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 3 \\ -5 & 14 & 11 \end{bmatrix}$, $\mathbf{AB}$ non è definito,
$\mathbf{AC}$ non è definito, $\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 3 & 13 & 13 \end{bmatrix}$.

9. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, ed i vettori
$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, calcolare $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 9 & 18 & 37 \\ 6 & 12 & 28 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{Bv} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{vw} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{wv} = 1$.

10. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,
calcolare $\mathbf{AO} = \mathbf{O}$, $\mathbf{OA} = \mathbf{O}$, $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$, $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$,
$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.