C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 17/02/2017

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Quanti sono i numeri di 6 cifre che: (a) non iniziano con la cifra 0? $\boxed{9 \cdot 10^5}$

   (b) contengono 3 volte esatte la cifra 1 e 3 volte esatte la cifra 2? $\boxed{\binom{6}{3} = 20}$

   (c) contengono 2 volte esatte la cifra 1, 2 volte esatte la cifra 2 e non contengono la cifra 0? $\boxed{7^2 \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 4410}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $x > 0$, calcolare:

   (a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \boxed{+\infty}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty \left(= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}} \right)}$

   (Per trovare il secondo limite è utile la regola di de l'Hospital.)

   (b) $f'(x) = \boxed{\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{2x\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}}$

   (c) $f''(x) = \boxed{\dfrac{\left[\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} + (\sqrt{x} - 1)\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\right] 2x\sqrt{x} - (\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}} 3\sqrt{x}}{4x^3} = \dfrac{x - 3\sqrt{x} + 3}{4x^2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}}$

   (d) i punti stazionari di f e classificarli:

   $$\boxed{f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1; f''(1) = \frac{e}{4} > 0; (1, e) \text{ min. rel. (e ass.)}}$$

   (e) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro 1:

   $$\boxed{f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 = e + \frac{e}{8}(x - 1)^2}$$

   (f) i punti di flesso della f:

   $$\boxed{f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \tfrac{3}{2}\right)^2 \geq -\tfrac{3}{4}; \text{ non ci sono flessi}}$$

   (g) $\displaystyle\int_0^{(\ln 3)^2} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \boxed{2 \int_0^{\ln 3} e^u \, du = 2\left[e^u\right]_0^{\ln 3} = 2(3 - 1) = 4}$

   (per sostituzione: $u = \sqrt{x}$) $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\, du = 2u\, du$

3. Calcolare

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(3x)\,dx = \boxed{\frac{1}{3}\left[x\,\mathrm{sen}(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{sen}(3x)\,dx = \left[\frac{1}{9}\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{9}}$

(integrazione per parti)

(b) $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \boxed{\int_1^9 x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^9 = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^9 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}}$

4. Nella reazione bimolecolare $2\,NO_2 \longrightarrow N_2O_4$ la concentrazione $C = C(t) = [NO_2]$ è la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = -kC^2 & (k \text{ è una costante positiva, } t \text{ è il tempo}) \\ C(0) = C_0\,. \end{cases}$$

Trovare la soluzione $C(t)$ e il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$.

$$\boxed{C(t) = \frac{1}{\frac{1}{C_0} + kt} \qquad\qquad \lim_{t\to\infty} C(t) = 0}$$

$\int_{C_0}^{C} \frac{dC}{C^2} = -k\int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} = kt \Rightarrow C = C(t) = \frac{1}{\frac{1}{C_0}+kt},\ t \geq 0$

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 7 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$,

(a) calcolare la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{a}}$,

(b) calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{Aa} = \boxed{\begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{b}}$, $\mathbf{ba}^T = \boxed{\begin{bmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 16 & 8 & -8 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$,

(c) dire quante soluzioni $\mathbf{x}$ ha il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{a}$ e giustificare la risposta:

Il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{a}$ è determinata, cioè ha una sola soluzione perché dalla soluzione del sistema (a) si è visto che la matrice $\mathbf{A}$ ha rango 3 ed è invertibile. La soluzione di $\mathbf{Ax} = \mathbf{a}$ è quindi $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}$.

(a) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & -4 \\ 7 & -4 & 2 & -8 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - \frac{7}{2}R_1 \to \\ R_3 + \frac{3}{2}R_1 \to \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + R_2 \to \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{2}R_1 \to \\ -2R_2 \to \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + \frac{1}{2}R_3 \to \\ R_2 + 11R_3 \to \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + \frac{1}{2}R_2 \to \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$