C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 07/07/2017

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. (a) Quante sono le matrici 3×3 i cui elementi sono 0 o 1? $\boxed{2^9 = 512}$

   (b) Quante di tali matrici contengono esattamente 6 volte la cifra 1?

   $$\boxed{\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 12 = 84}$$

   (c) Quante sono le matrici di (a) tali che ogni riga e colonna abbia una somma pari? $\boxed{2^4 = 16 \text{ (Scelti gli elementi } a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \text{ gli altri sono determinati.)}}$

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcolare

   (a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

   $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}}, \qquad \text{(b) } \mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}},$$

   (c) (se ciò è possibile) $\mathbf{bb}^T = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$, dove $\mathbf{b}^T$ è il trasposto di $\mathbf{b}$,

   (d) (se ciò è possibile) $\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$.

(a),(b)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 + 3R_1 \to \\ R_3 + 2R_1 \to \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] R_3 - \tfrac{2}{3}R_2 \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_1 \to \\ \frac{1}{3}R_2 \to \\ -3R_3 \to \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + R_3 \to \\ R_2 - \frac{5}{3}R_3 \to \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right] \quad R_1 + 2R_2 \to \quad \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Data la funzione $f(x) = e^{\operatorname{sen}(x)} \cdot \cos(x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$, calcolare:

(a) $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \boxed{0}$, $\lim_{x \to +\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \boxed{0}$

(b) $f'(x) = \boxed{e^{\operatorname{sen} x} (\cos x)^2 + e^{\operatorname{sen} x}(-\operatorname{sen} x) = (1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x)\, e^{\operatorname{sen} x}}$

(c) $f''(x) = \boxed{e^{\operatorname{sen} x} \cos x(\cos^2 x - 3\operatorname{sen} x - 1) = -e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x(\operatorname{sen} x + 3)}$

(d) i punti stazionari di f e classificarli:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, cioé $x = \operatorname{arcsen}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$, f' cambia segno da $+$ a $-$ $\Rightarrow$ massimo rel. (e ass.)

(e) l'equazione della retta tangente al grafico della f nel punto $(0, 1)$:

$y - 1 = f'(0)x = x, \quad y = x + 1$

(f) i punti di flesso della f:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cos x = 0,\ x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Leftrightarrow x = 0$; f'' cambia in 0 il segno da $+$ a $-$; $(0, 1)$ è punto di flesso discendente

(g) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx = \boxed{\int_{-1}^{1} e^t\, dt = [e^t]_{-1}^{1} = e - e^{-1} = e - \frac{1}{e}}$

(integrazione per sostituzione $t = \operatorname{sen}(x)$). $dt = \cos x\, dx$

4. Data la funzione $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $(x > 0)$, calcolare

(a) $f'(x) = \boxed{\dfrac{1 - \ln x}{x^2}}$

(b) $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f'(x)\, dx = \boxed{[f(x)]_{\frac{1}{e}}^{1} = \left[\dfrac{\ln x}{x}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} = 0 - \dfrac{\ln(e^{-1})}{e^{-1}} = e}$

5. $\int_0^8 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = \boxed{\int_0^8 x^{-\frac{2}{3}}\, dx = \left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_0^8 = 6}$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(4x)\, dx = \boxed{-\dfrac{1}{4}\, [x\cos(4x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x)\, dx = -\dfrac{\pi}{8} + 0 = -\dfrac{\pi}{8}}$

(integrazione per parti)

7. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy, e precisare il suo dominio:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x} \\ y(-1) = -1\,. \end{cases}$$

$y(x) = -\dfrac{1}{1+\ln(-x)}$	dominio: $x < -\dfrac{1}{e}$

Se $y < 0, x < 0$ (condizione iniziale), $\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \ln|x| + c$. Poiché $x < 0$ si ha $|x| = -x$. Dalla condizione iniziale si ha $1 = c$. Ne segue che $-\frac{1}{y} = \ln(-x) + 1 > 0$ (si ricordi che $y < 0$). Passando al reciproco negativo si ottiene $y = -\frac{1}{1+\ln(-x)}$ per $\ln(-x) + 1 > 0$, cioè per $x < -e^{-1} = -\frac{1}{e}$.