Prova scritta di Analisi Matematica I (04/09/2012)

Nome..**Cognome**.. **Matricola**.................

Prove orali: inizio appello/fine appello.

(1) [8 pt] Studiare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{|x^2 - 7x + 12|}{x}.$$

- Determinare il dominio di f, gli intervalli su cui f è continua e i limiti di f agli estremi di questi intervalli.

- Trovare i punti in cui la funzione f è derivabile e calcolarne la derivata.

- Trovare gli intervalli su cui f è, rispettivamente, crescente o decrescente.

- Trovare punti di massimo e minimo relativo.

- Tracciare un grafico qualitativo di f.

(2) [4 pt] Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{e^{2x^2}} - e^{1+2x^2}}{x^4}.$$

(3) [4 pt.] Calcolare

$$\int_6^{10} \log\left[(x-1)^2 - 16\right] dx.$$

(4) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z^2 - 2z)^2 + 7(z^2 - 2z) + 10 = 0.$$

(5) [2 pt] Per quali valori di $\gamma > 0$ si ha la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n^{7\gamma}}$$

(6) [4 pt. se esatto, -1 pt. se errato, 0 pt. se non fatto.] Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ tali che $f(0) = g(1) = 0$ e $f(1) = g(0) = 1$. Sia f crescente a sia g decrescente.

Quale delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- Esiste $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = g(x)$.
- $g \circ f$ è definita in $[0,1]$ ed è crescente.
- $g \circ f$ è definita in $[0,1]$ ed è decrescente.
- $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

(7) [3 pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, e sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = x \cdot f(x^2)$$

Calcolare

$$h'(x).$$

(8) [2 pt] Calcolare il limite di successione

$$\lim_{n\to\infty} \left[e\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n + \pi\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} + \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \right].$$

AM I - 04/09/2012 (1) $f(x)=\frac{|x^2-7x+12|}{x}=\frac{|(x-5)\cdot(x-2)|}{\cancel{x}}=$

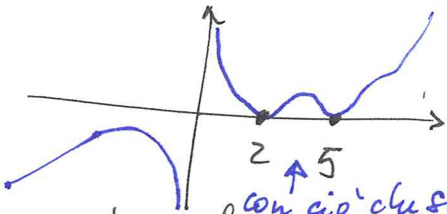
$=\frac{\text{sgn}|x^2-7x+12|\cdot(x^2-7x+12)}{x}=\text{sgn}(x-5)\cdot\text{sgn}(x-2)\cdot\left(x-7+\frac{12}{x}\right)$

$=\frac{\text{sgn}(x-5)\cdot\text{sgn}(x-2)\cdot(x-5)\cdot(x-2)}{x}$: diversi modi di scrivere f usando $|x|=\text{sgn}(x)\cdot x$ se $x\neq 0$.

Dominio$(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $f\in C(\mathbb{R}\setminus\{0\};\mathbb{R})$.
$=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\text{sgn}[(x-5)(x-2)]\cdot\left(x-7+\frac{12}{x}\right)=1\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$

$\lim_{x\to 0^\pm} f(x)=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{12}{x}=\frac{12}{0^\pm}=\pm\infty$:

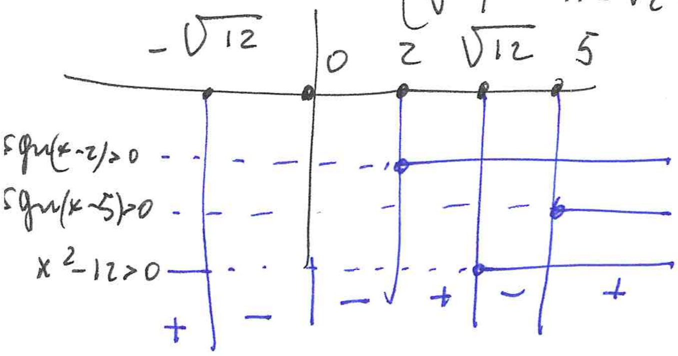


Osservo che $f(x)=0 \iff (x-5)(x-2)=0 \iff x=2,5$ e che $f(x)\geq 0 \iff x>0$

Se $x\neq 5,2$, allora $\boxed{\exists f'(x)=\text{sgn}(x-5)\cdot\text{sgn}(x-2)\cdot\left(1-\frac{12}{x^2}\right)}$
$=\text{sgn}(x-5)\cdot\text{sgn}(x-2)\cdot(x^2-12)\cdot\frac{1}{x^2}$

E' chiaro che $\lim_{x\to 5^+} f'(x)\neq\lim_{x\to 5^-} f'(x)$ e $\lim_{x\to 2^+} f'(x)\neq\lim_{x\to 2^-} f'(x)$:

Dominio$(f')=\mathbb{R}\setminus\{0,2,5\}$

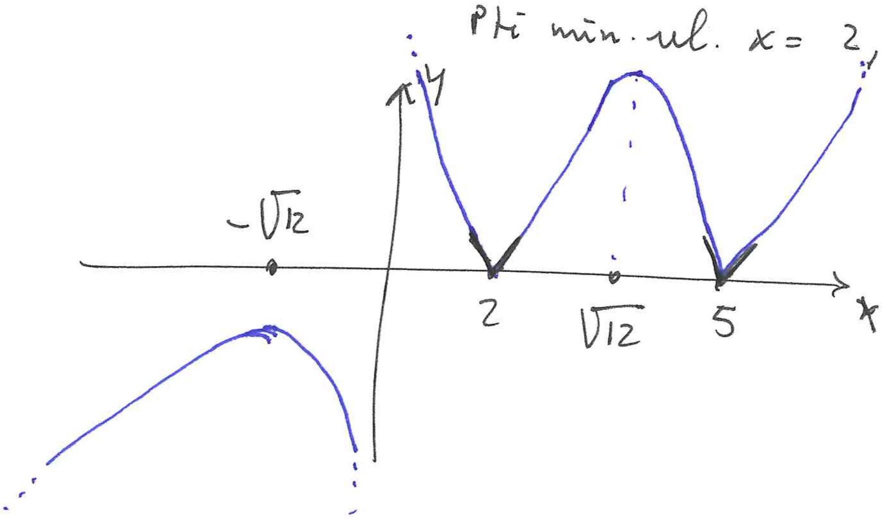


f cresce su $(-\infty,-\sqrt{12}]$, $[2,\sqrt{12}]$ e $[5,+\infty)$

f decresce su $[-\sqrt{12},0)$, $(0,2]$, $[\sqrt{12},5]$

Pti MAX. rel. $x=-\sqrt{12}$, $+\sqrt{12}$

Pti min. rel. $x=2$, 5.



(2) limite di tipo 0/0. $e^{e^{2x^2}} = e^{1+2x^2+\frac{(2x^2)^2}{2}+o(x^4)}$

$= e\cdot e^{2x^2+2x^4+o(x^4)}$

quindi $\frac{e^{e^{2x^2}} - e^{1+2x^2}}{x^4} = \frac{e^{1+2x^2+2x^4+o(x^4)} - e^{1+2x^2}}{x^4}$

$= e^{1+2x^2}\cdot\frac{e^{2x^4+o(x^4)}-1}{x^4} \underset{x\to0^+}{\sim} e\cdot\frac{2x^4+o(x^4)}{x^4} \xrightarrow[x\to0^+]{} 2\cdot e$

(3) $(x-1)^2-16 = (x-1-4)(x-1+4) = (x-5)(x+3) \Rightarrow \log[(x-1)^2-16] = \underbrace{\log(x-5)+\log(x+3)}_{\text{questo se } x>5}$

~~poiché~~

$\Rightarrow \int_6^{10}\log[(x-1)^2-16]\,dx = \int_6^{10}\log(x-5)+\log(x+3)\,dx$

$\overset{\text{I.P.}}{=} \left[(x-5)\log(x-5)\right]_6^{10} - \int_6^{10}\frac{x-5}{x-5}\,dx + \left[(x+3)\log(x+3)\right]_6^{10} - \int_6^{10}\frac{x+3}{x+3}\,dx$

$= 5\log5 - 4 + 13\log13 - 9\log9 - 4 = \boxed{5\log5 + 13\log13 - 9\log9 - 8}$

(4) Pongo $w = z^2-2z$: $w^2+7w+10 = (w+2)(w+5) = 0 \iff w=-2$, $w=-5$

$z^2-2z=-2$ sse $z^2-2z+2=0$ sse $z = 1\pm i$

$\frac{\Delta}{4} = 1-2 = -1 = i^2$

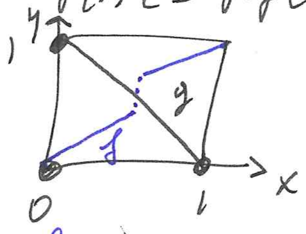
$z^2-2z=-5$ sse $0 = z^2-2z+5 = z^2-2z+1+4 = (z-1)^2-(2i)^2$ sse $z = 1\pm 2i$

(5) $\forall n\ge 0 \Rightarrow 2^n+n^{7\gamma} \ge 2^n \Rightarrow 0 \le \frac{1}{2^n+n^{7\gamma}} \le \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ converge

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n^{7\gamma}}$ converge $\forall \gamma>0$ per confronto.

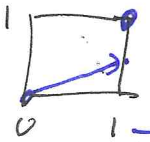
(6) Giuste le III risposte: $\forall x\le y \Rightarrow f(x)\le f(y) \iff g\circ f(x) = g(f(x)) \ge g(f(y)) = g\circ f(y)$

Errate le I: per esempio



Errate le II, poiché vale la III!!

Errate le IV: per esempio



$\lim_{x\to1} f(x) < f(1)$

(7) $h'(x) = f(x^2) + x\cdot f'(x^2)\cdot 2x = f(x) + 2x^2 f'(x^2)$

(8) $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n/2}\right]^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-2}$ e $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} (e^{-1})^{\infty} = 0$ e $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$

Il limite è $\boxed{e^{-2}+\sqrt{2}\cdot e}$

Prova scritta di Analisi Matematica II (04/09/2012)

Nome..**Cognome**... **Matricola**................

Prova orale: inizio appello/fine appello.

(1) **[14 pti]** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \{(x, y, z) : \ (x - z)^2 + y^2 \leq 16, \ 0 \leq z \leq a\}$.

(1.1) Fare un disegno *qualitativo* di Ω.

(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω.

(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere *una* formula esplicita che dia il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di F attraverso $\partial\Omega$. (Nella formula devono apparire, magari iterati, solo integrali di una variabile).

(1.4) Calcolare il flusso di cui al punto (1.3) quando $F(x, y, z) = (0, yx^2, 0)$.

(1.5) . Si consideri la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) : \ (x - z)^2 + y^2 = 16, \ 0 \leq z \leq a\}$. Parametrizzare $\partial\Sigma$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono compatibili con la normale ν a Σ (ν essendo la normale di cui al punto (1.2)).

(1.6) Calcolare $\iint_\Sigma (\nabla \times F) \cdot \nu d\sigma$, con $F \in C^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$, $F(x, y, z) = (xz, 0, 0)$.

(2) **[3 pti]** Dire per quale valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ il campo $F_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è esatto, dove

$$F_a(x, y) = (e^y - ye^x, xe^y + ae^x)\,.$$

Calcolarne un potenziale.

(3) **[4 pti]** Sia $A = \left\{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq 49,\ x \geq \frac{7}{2}\right\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

(4) **[2 pti]** Trovare l'integrale generale di

$$y'' + 16y = 4.$$

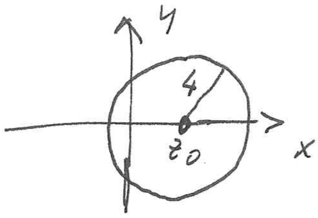
(5) **[2 pti]** Siano f in $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e α in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e si ponga

$$h(t) = f(t, \alpha(t))$$

Calcolare $h'(t_0)$.

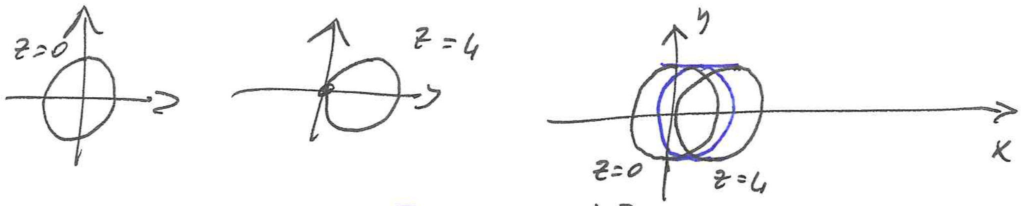
(6) **[5 pti]** Classificare i punti critici di $f(x, y) = (4 - y)(y - x^2)$.

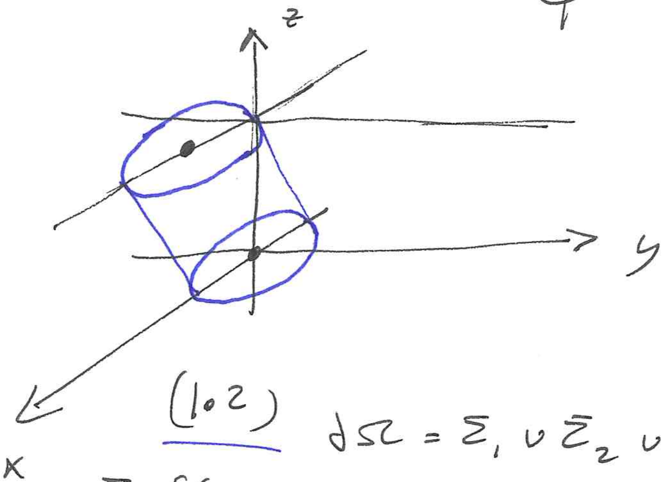
AM II (1) (1.1) $(x-z)^2+y^2\le 16$; $0\le z\le 4$

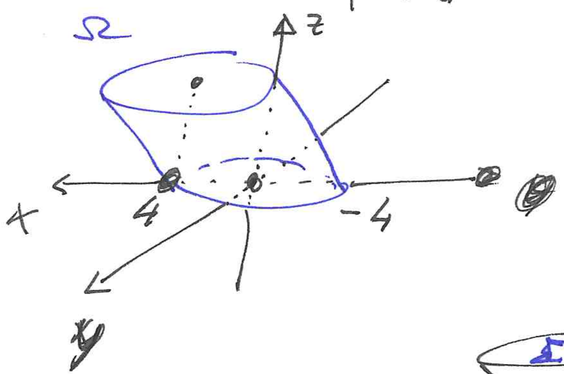


← nel piano $z=z_0$ fissato

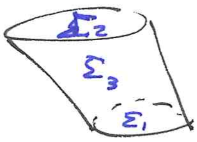
Al variare di da $z=0$ e $z=4$:







(1.2) $\partial\Omega = \Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$



$\Sigma_1=\{(x,y,z):\ z=0,\ x^2+y^2\le 4^2\} = \{(x,y,0): x^2+y^2\le 4^2\}\subseteq\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2\supseteq A_1 = \{(r,\theta):\ 0\le r\le 4,\ -\pi\le\theta\le\pi\} = [0,4]\times[-\pi,\pi] \xrightarrow{\Phi_1}\Sigma_1$

$\Phi_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \Rightarrow \partial_r\Phi_1\times\partial_\theta\Phi_1(r,\theta) = \begin{vmatrix} i & j & k\\ \cos\theta & \sin\theta & 0\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\end{vmatrix} = (0,0,r)$

Φ_1 non è compatibile con ν

$\mathbb{R}^2\supseteq A_2 = A_1 \xrightarrow{\Phi_2} \Sigma_2 = \{(x,y,4): (x-4)^2+y^2\le 4^2\}\subseteq\mathbb{R}^3$

$\Phi_2(r,\theta) = (r\cos\theta+4,\ r\sin\theta,\ 0) \Rightarrow \partial_r\Phi_2\times\partial_\theta\Phi_2(r,\theta) = \partial_r\Phi_1\times\partial_\theta\Phi_1(r,\theta)=(0,0,r)$

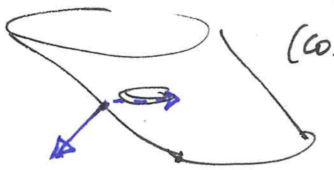
Φ_2 è compatibile con ν

$\mathbb{R}^2\supseteq A_3=\{(\theta,z):\ -\pi\le\theta\le\pi;\ 0\le z\le 4\} = [-\pi,\pi]\times[0,4]\xrightarrow{\Phi_3}\Sigma_3=\{(x,y,z): (x-z)^2+y^2=4^2;\ 0\le z\le 4\}\subseteq\mathbb{R}^3$

$\Phi_3(\theta,z) = (\cos\theta+z,\ \sin\theta,\ z) \Rightarrow \partial_\theta\Phi_3\times\partial_z\Phi_3(\theta,z) = \begin{vmatrix} i & j & k\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = (\cos\theta, \sin\theta, -\cos\theta)$

Per $\theta=0$: $\partial_\theta\Phi_3\times\partial_z\Phi_3(0,z) = (1,0,-1)$

è compatibile con ν



(1.3) Con T. divergenza. Mi ispiro a Φ_1,Φ_2,Φ_3 e pongo:

$$\begin{cases} x = z + r\cos\theta\\ y = r\sin\theta\\ z = z\end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} 0\le z\le 4\\ 0\le r\le 4\\ -\pi\le\theta\le\pi\end{array} \Rightarrow \det J\begin{pmatrix} x & y & z\\ r & \theta & z\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 1\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$

Se $F=(P,Q,R)$ allora

$$\iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu\, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}F\, dx\,dy\,dz = \int_0^4 r\,dr\int_0^4 dz\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\ \operatorname{div}F(z+r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)$$

con $\operatorname{div}F = \partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R$.

Senza T. Divergenza. Uso (1.2): $\iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu\, d\sigma =$

$$= -\underbrace{\int_0^4 dr\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, R(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)\cdot r}_{\Sigma_1} + \underbrace{\int_0^4 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\; R(r\cos\theta+4, r\sin\theta, 4)\cdot r}_{\Sigma_2}$$

$$+ \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^4 dz \left\{P(\cos\theta+z,\sin\theta,z)\cdot\cos\theta + Q(\cos\theta+z,\sin\theta,z)\cdot\sin\theta - R(\cos\theta+z,\sin\theta,z)\cdot\cos\theta\right\}}_{\Sigma_3}$$

(1.4) $\operatorname{div}F(x,y,z) = x^2$: uso T. Div. e (1.3) ottenendo $\iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu\, d\sigma =$

$$= \int_0^4 r\,dr \cdot \int_0^4 dz \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cdot (z + r\cos\theta)^2 = \int_0^4 r\,dr \cdot \int_0^4 dz \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \; (z^2 + 2rz\cos\theta + r^2\cos^2\theta)$$

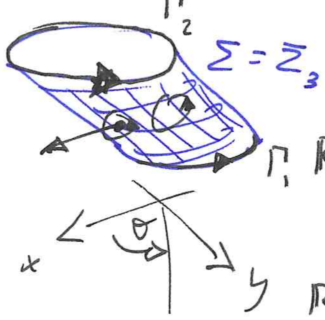
$$= \dots = \left(\tfrac{r^2}{2}\right)_0^4 \cdot \left(\tfrac{z^3}{3}\right)_0^4 \cdot (\theta)_{-\pi}^{\pi} + 2\cdot\left(\tfrac{r^3}{3}\right)_0^4 \cdot \left(\tfrac{z^2}{2}\right)_0^4 \cdot (+\sin\theta)_{-\pi}^{\pi} + \left(\tfrac{r^4}{4}\right)_0^4 \cdot (z)_0^4 \cdot \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\, d\theta =$$

R ho tre integrali: di z^2, di $2rz\cos\theta$, di $r^2\cos^2\theta$

$$= \frac{4^2}{2}\cdot\frac{4^3}{3}\cdot 2\pi + 0 + \frac{4^4}{4}\cdot 4\cdot\pi = 4^5\pi\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{7\cdot\pi\cdot 4^4}{3}$$

Ho usato $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \pi$. Si può mostrare ciò con $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ e cambiando variabili; oppure osservando che per periodicità $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta$, ma $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\, d\theta + \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, d\theta = 2\pi$.

(1.5)



$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

Γ_1 $\mathbb{R} \supseteq [-\pi,\pi] \xrightarrow{\gamma_1} \Gamma_1 = \{(x,y,0) : x^2+y^2 = 4^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$\gamma_1(\theta) = 4(\cos\theta, \sin\theta, 0)$: è compatibile con ν.

$\mathbb{R} \supseteq [-\pi,\pi] \xrightarrow{\gamma_2} \Gamma_2 = \{(x,y,4) : (x-4)^2+y^2 = 4^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$\gamma_2(\theta) = (4\cos\theta+4, 4\sin\theta, 4)$: non è compatibile con ν.

(1.6) $\nabla\times F(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xz & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, x, 0)$: non uso Stokes, ma calcolo direttamente $\iint_{\Sigma=\Sigma_3} (0,x,0)\cdot\nu\, d\sigma =$ uso (1.2)

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^4 dz\, (0, \cos\theta+z, 0)\cdot(\cos\theta, \sin\theta, -\cos\theta) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^4 dz\; (\cos\theta\sin\theta + z\sin\theta) = \boxed{0}$$ poiché $0 = \int_{-\pi}^{\pi}\sin\theta\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\sin\theta\, d\theta$.

(2) $F_a = (P, Q)$: $P_y = e^y - e^x$ $\quad Q_x = e^y + a e^x$: F_a chiuso sse esatto sse $a = -1$

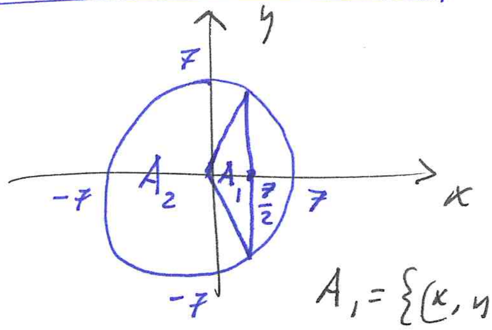
Un potenziale ϕ di F_{-1} soddisfa:

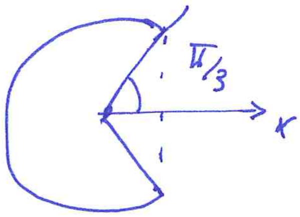
$$\phi(x,y) = \int Q(x,y)\,dy = \int (x e^y - e^x)\,dy = x e^y - y e^x + C(x)$$

e $\partial_x \phi(x,y) = e^y - y e^x + C'(x) = P(x,y) \iff C'(x) \equiv 0 \iff C = \text{cost.}$;

$\boxed{\phi(x,y) = x e^y - y e^x + c}$ $(c \in \mathbb{R})$: potenziali di F_{-1}

(3)





$tg(\pi/3) = \sqrt{3}$

$$A_1 = \{(x,y): 0 \le x \le 7/2;\ |y| \le \sqrt{3}\cdot x\}$$

$$A_2 = \{(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta): 0 \le r \le 7;\ \pi/3 \le \theta \le 2\pi - \pi/3\}$$

$$\iint_{A_2} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^7 r\,dr \cdot \int_{\pi/3}^{2\pi-\pi/3} d\theta \cdot r^2 = \left(\frac{r^4}{4}\right)_0^7 \cdot \left(2\pi - \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{7^4}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi = \frac{7^4}{3}\pi$$

$$\iint_{A_1} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{7/2} dx \int_{-\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}x} (x^2+y^2)\,dy = \int_0^{7/2} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}x} dx$$

$$= \int_0^{7/2} \left(2\sqrt{3}x^3 + \frac{2\sqrt{3}^3 x^3}{3}\right) dx = 4\sqrt{3}\cdot\left(\frac{x^4}{4}\right)_0^{7/2} = 4\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{7^4}{2^4} = \frac{\sqrt{3}\cdot 7^4}{4}$$

$$\Rightarrow \iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy = \boxed{7^4\cdot\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$$

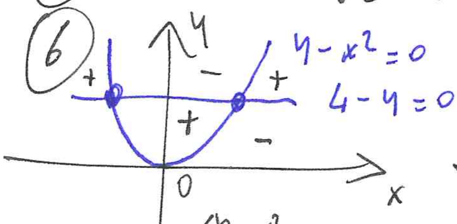
(4) $y(x) = A\cdot\cos(4x) + B\cdot\sin(4x) + \frac{1}{4}$ con $A, B \in \mathbb{R}$

$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

svolgimento banale...

(5) Sia $f = f(x,y)$: $h'(t_0) = f_x(t_0, \alpha(t_0))\cdot 1 + f_y(t_0, \alpha(t_0))\cdot\alpha'(t_0)$

(6)



$\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ 4 - y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 \\ x = \pm 2 \end{cases} \to$ pti di sella

e ho un pto MAX rel.

giusto per avere qualche info.

$\nabla f(x,y) = (-2x\cdot(4-y), -(y-x^2) + 4 - y) = (-2x(4-y), 4 + x^2 - 2y) = (0,0) \iff$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ o $\begin{cases} y = 4 \\ x = \pm 2 \end{cases}$: $(0,2)$ MAX.REL, $(\pm 2, 4)$ SELLE: pti critici

$\text{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} -2(4-y) & 2x \\ 2x & -2 \end{bmatrix}$: $\text{Hess} f(0,2) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ def. neg. MAX. rel.

$\text{Hess} f(\pm 2, 4) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 4 \\ \pm 4 & -2 \end{bmatrix}$: non def., pti sella.

Prova scritta di Analisi Matematica LB (04/09/2012)

Nome..**Cognome**... **Matricola**................

(1) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z^2 - 6z)^2 + 23(z^2 - 6z) + 130 = 0.$$

(2) [3 pt] Per quali valori di $\gamma > 0$ si ha la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n^{8\gamma}}$$

(3) [**4 pti**] Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \{(x, y, z) : \ (x - z)^2 + y^2 \leq 4, \ 0 \leq z \leq 2\}$. e $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ continua.

Trovare $A \subset \mathbb{R}^2$ e, per $(x, y) \in A$, trovare $I(x, y) \subseteq \mathbb{R}$, tali che

$$\iiint_\Omega f(x, y, z) dxdydz = \iint_A \left[\int_{I(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dxdy$$

(4) [**5 pti**] Sia $A = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq 81, \ x \geq \frac{9}{2}\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A (x^2 + y^2) \, dxdy.$$

(5) [3 pti] Trovare l'integrale generale di

$$y'' + y = 1.$$

(6) [4 pti] Siano f in $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e α in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e si ponga

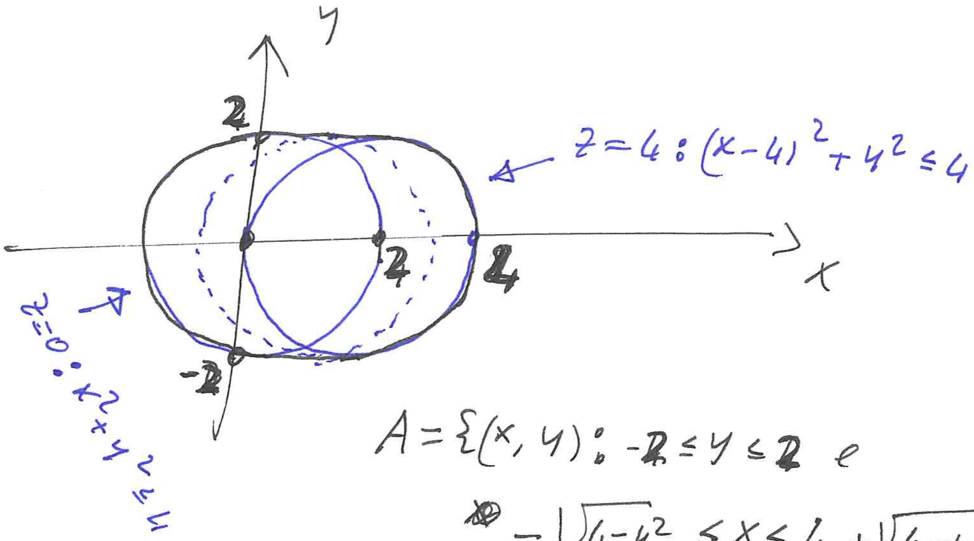
$$h(t) = f(t, \alpha(t))$$

Calcolare $h'(t_0)$.

(7) [8 pti] Classificare i punti critici di $f(x, y) = (y - 7)(y - x^2)$.

AM-LB, 04/09/2012

Tutti gli esercizi sono in AM I o AM II tranne il (4).



$A = \{(x,y) : -2 \le y \le 2$ e
$-\sqrt{4-y^2} \le x \le 4 + \sqrt{4-y^2}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Se $(x,y) \in A$ allora $I(x,y) = \{z : 0 \le z \le 2$ e $(x-z)^2 \le 4 - y^2\}$.